ĐỀ THI OLYPIC TOÁN 1993

VÒNG 1

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. a) Tìm tất cả các ma trận thực $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sao cho: $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Cho $2n$ số nguyên $a_1, \ldots, a_n;\ b_1, \ldots, b_n$ thoả mãn điều kiện $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = 0$. Đặt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 + a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1 + a_2b_2 & \ldots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & 1 + a_nb_n \end{pmatrix}$$

Tính $|\det A|$

Câu 2. a) Đặt $f(x) = \max\left\{a2arctgx;\ \dfrac{x}{x^2+1}\right\} \qquad x \in R.$

Tìm một nguyên hàm của $f(x)$ trên R.

b) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (tgx)^{\sqrt{2}}}$

Câu 3. a) Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm bậc hai không đồng nhất bằng không trên bất kỳ đoạn nào của R. Biết rằng đồ thị $y = f(x)$ cắt đường thẳng $ax + by + c = 0$ tại ba điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in R$ sao cho $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu qua $x = x_0$.

b) Ký hiệu $P_n(X)$ là tập hợp mọi đa thức có bậc $\leq n$ với hệ số thực. Cho hai số $a,\ b \in R$ khác nhau. Xét ánh xạ $f : P_3(X) \to P_2(X)$ xác định theo công thức:

$$\forall p(x) \in P_3(X) : \qquad f(p) = p(x+a) - p(x+b).$$

i) Hỏi f có phải là toàn ánh không.

ii) Tính $f^{-1}(0)$.

VÒNG 2

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho $0 \leq \alpha \leq 1$. Chứng minh rằng với mọi $a,\ b \in C$, phương trình $z^3 - az + b = 0$ có ít nhất một nghiệm thoả mãn điều kiện $|z - \alpha| \leq 2 - \alpha$.

Câu 2. Cho $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2};\ 0 \leq y \leq +\infty$. Chứng minh bất đẳng thức

$$y(arctgy - x) \leq \ln\left(\cos\sqrt{1+y^2}\right)$$

Hỏi khi nào có đẳng thức?

Câu 3. Cho $P(x) \neq const$ là đa thức với hệ số thực. Chứng minh rằng nếu hệ phương trình

$$\begin{cases} \int\limits_0^x P(t)\sin t dt = 0 \\ \int\limits_0^x P(t)\cos t dt = 0 \end{cases}$$

có nghiệm thực thì số nghiệm thực chỉ có thể là hữu hạn.

Câu 4. a) Cho hai ma trận thực, vuông cấp hai A và B. Giả thiết $\det(A+B) \neq 0$ và $\det(A-B) \neq 0$. Đặt $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. Chứng minh rằng $\det M \neq 0$.

b) Chứng minh khẳng định trên cho trường hợp A và B là hai ma trận vuông cấp n bất kỳ.

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN 1994

MÔN THI: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \in R$. Chứng minh rằng ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1^2 & -a_2 & -a_3 & a_4 \\ a_2 & 1+a_1^2 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & 1+a_1^2 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & 1+a_1^2 \end{pmatrix}$$

khả nghịch. Tìm $\det(A^{-1})$

Câu 2. Cho a_{ij} là các số thực nguyên $(i, j = 1, \ldots, n)$. Hãy giải hệ:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \frac{1}{2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Câu 3. Cho ma trận

$$A_j = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi j}{n} & -\sin\dfrac{2\pi j}{n} \\ \sin\dfrac{2\pi j}{n} & \cos\dfrac{2\pi j}{n} \end{pmatrix}; \qquad j \in N$$

Tính tổng

$$S_p = A_0^p + A_1^p + \ldots + A_{n-1}^p, \qquad (p, n \in N^+)$$

Câu 4. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x}(A^n - E)\right)$; trong đó $A = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x}{n} \\ -\dfrac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}$ $n \in N^+$, E là ma trận đơn vị.

Câu 5. Chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông cấp n với $A^2 = E$ thì:

$$\text{hạng}(A+E) + \text{hạng}(E-A) = n.$$

Câu 6. Cho ma trận vuông cấp hai A thoả mãn $A^2 = A$. Chứng minh rằng để $AX - XA = 0$ (X là ma trận vuông cấp 2, 0 là ma trận không), cần và đủ là tồn tại ma trận vuông cấp hai X_0 sao cho

$$X = AX_0 + X_0A - X_0$$

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN 1995

MÔN THI: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho A là ma trận vuông cấp n sao cho $A^{-1} = 3A$. Tính: $\det(A^{1995} - A)$.

Câu 2. Cho các số a_{ij} $(i, j = 1,\ 2, \dots,\ n)$ thoả mãn các điều kiện :

$$a_{ij} + a_{ji} = 0, (\forall\, i, j = 1,\ 2, \dots,\ n)$$

Chứng minh rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

có nghiệm không tầm thường.

Câu 3. Cho ma trận $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tính M^n với n nguyên dương cho trước.

Câu 4. Cho hai số thực $a,\ b$ $(a \neq b)$, $B = (b_{ij})$ là ma trận vuông cấp 6 được xác định như sau

$$b_{ij} = \begin{cases} x & \text{khi} \quad i = j \\ a & \text{khi} \quad i \neq j,\ i + j = 2n \\ b & \text{khi} \quad i \neq j,\ i + j = 2n + 1 \end{cases}$$

Giả sử $\det A = \sum\limits_{k=0}^{6} \alpha_k (x - a)^k$

Tính α_4.

Câu 5. Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp n $(n > 1)$ có hạng r. Xét ma trận $A^* = (A_{ij})$, trong đó A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij} trong A. Tìm hạng của A^*.

Câu 6. Cho B là ma trận vuông cấp n và α là một số thực thoả mãn điều kiện $\det(B - \alpha E) = 0$ với E là ma trận đơn vị.

Chứng minh rằng với mọi $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$, $n \in N$, ta đều có

$$\det \left(\sum_{k=0}^{n} a_k B^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k E \right) = 0$$

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN 1996

MÔN THI: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho $P_n(x)$ là đa thức bậc n. Chứng minh rằng:

i) $P_n(x^m)$ chia hết cho $x - 1$ thì nó chia hết cho $x^m - 1$.

ii) $P_n(x^m)$ chia hết cho $(x - a)^k$ thì nó chia hết cho $(x^m - a^m)^k$ $(a \neq 0)$.

Câu 2. Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c$ thực.

i) Chứng minh rằng nếu $A^{1996} = 0$ thì $A^2 = 0$.

ii) Xác định $a,\ b,\ c$ sao cho tồn tại $n \in N^+$ để $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Câu 3. Cho

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n) \end{pmatrix}$$

Tính $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)}$.

Câu 4. Cho A là một ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu A không khả nghịch thì có thể thay thế các phần tử a_{ii} của A bởi 0 hoặc 1, các phần tử khác giữ nguyên, để nhận được ma trận mới S khả nghịch.

Câu 5. Chứng minh rằng nếu $a \neq 0$ thì hệ

$$\begin{cases} ax + (1-b)y + cz + (1-d)t = a \\ (b-1)x + ay + (d-1)z + ct = b \\ -cx + (1-d)y + az + (b-1)t = c \\ (d-1)x - cy + (1-b)z + at = d \end{cases}$$

luôn luôn có nghiệm $\forall b,\ c,\ d \in R$.

ĐỀTHI OLYMPIC TOÁN 1997

MÔN THI: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Giả sử $x_0,\ y_0,\ z_0$ là các số thực cho trước. Hãy xác định tất cả các số thực $x_n,\ y_n,\ z_n\ \ (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$ thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Câu 2. Cho các số nguyên dương n và τ $(\tau \leq n)$. Xét tất cả các ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp n hạng τ trên trường số thực thoả mãn hệ thức $A^2 = A$. Tính các giá trị có thể có của biểu thức.

$$S = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Câu 3. Chứng minh rằng với mọi ma trận vuông cấp n cho trước trên trường số thực đều tìm được số nguyên dương N sao cho hạng $A^k =$ hạng A^{k+1}. với mọi $k \geq N$.

Câu 4. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$M = \begin{pmatrix} C_0^0 & 2C_1^0 & 2^2C_2^0 & \ldots & 2^nC_n^0 \\ 0 & C_1^1 & 2C_2^1 & \ldots & 2^{n-1}C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & C_n^n \end{pmatrix}$$

Câu 5. Cho đa thức

$$P(x) = \prod_{k=1}^{1997} (x-k)^k$$

gọi G là tập hợp tất cả các đa thức với hệ số thực dạng

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \qquad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Xác định tất cả các giá trị thực a sao cho tồn tại đa thức $Q(x) \in G$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau đây:

$$\begin{cases} P(x) \neq Q(x) \\ Q(x) = 0 \quad \text{khi} \quad x = 1,\ 2, \ldots, 1997 \\ Q(x) \neq 0 \quad \text{khi} \quad x \notin \{1,\ 2, \ldots, 1997\} \\ P(x) = a \ \text{ và } \ Q(x) = a \ \text{ có nghiệm đều thực và} \\ \text{tập nghiệm của chúng trùng nhau} \end{cases}$$

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN 1998

MÔN THI: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Đặt:

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng: $A(\alpha)A(\beta) = A(\alpha+\beta)$. Tính $A^n\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 2. Giả sử A là ma trận vuông cấp n (n là số lẻ) với các phần tử là các số $1,\ -1$. Gọi $A_k,\ B_k$ tương ứng là tích các phần tử hàng k, cột k của A. Chứng minh rằng: $\sum_{k=1}^{n}(A_k + B_k) \neq 0$

Câu 3. Gọi A là ma trận $n+1$ hàng, $n+2$ cột sau đây:

$$M = \begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \ldots & C_n^0 & C_{n+1}^n \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \ldots & C_n^1 & C_{n+1}^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \ldots & C_n^2 & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & C_2^2 & \ldots & C_n^2 & C_{n+1}^2 \end{pmatrix}$$

Gọi D_k là định thức của ma trận nhận được từ A bằng cách gạch bỏ cột thứ k ($k = 1,\ 2, , \ldots, n+2$). Chứng minh rằng $D_k = C_{n+1}^{k-1}$.

Câu 4. Cho $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

Đặt $A^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n) \end{pmatrix}$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_{ij}(n)$, với $i, j = 1, 2, 3$.

Câu 5. M là tập tất cả các ma trận vuông cỡ $n \times n$, $(n \in N^*)$, có các phần tử là 1 hoặc -1 . Cho $B \in M$ có $\det B \neq 0$. Chứng minh tồn tại $A \in M$ sao cho $|\det A| = |\det B|$, A có tổng các phần tử trên cùng một hàng đều lớn hơn hoặc bằng không, tổng các phần tử trên cùng một cột đều lớn hơn hoặc bằng không.

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN 1999

MÔN THI: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. a) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{1998} & 1999 \\ 0 & \dfrac{x}{2000} \end{pmatrix}$.

Ký hiệu $A^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n,x) & a_{12}(n,x) \\ a_{21}(n,x) & a_{22}(n,x) \end{pmatrix}$.

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to 1} a_{ij}(n,x), \quad i, j = 1, 2.$

b) Cho $f(x) = x^{1999} + x^2 - 1$ và cho ma trận

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Tính $\det f(C)$.

Câu 2. a) Cho A, B là các ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng tập các giá trị riêng của AB và BA trùng nhau.

b) Cho A là ma trận có 1999 dòng và 2000 cột. Gọi A' là ma trận chuyển vị của A và B là ma trận phụ hợp của ma trận $A'A$. Biết rằng $\det(AA') \neq 0$ và $B \neq 0$. Xác định hạng của B.

Câu 3. Giả sử đa thức với hệ số thực $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ có n nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng

$$a_{k-1}a_{k+1} < a_k^2, \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Câu 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots + nx_1 = 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + \ldots + nx_{n-1} = n \end{cases}$$

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN 2000

MÔN THI: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho số nguyên dương $m > 1$ và số phức a có mô đun bằng 1. Chứng minh rằng phương trình

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m = a$$

có các nghiệm đều thực.

Câu 2. Cho A, B là các ma trận vuông cấp n thỏa mãn các điều kiện :

$$AB = BA,\ A^{1999} = 0,\ B^{2000} = 0$$

Chứng minh rằng $E + A + B$ khả nghịch.

Câu 3. Chứng minh rằng tích của hai ma trận phản đối xứng A, B là một ma trận phản đối xứng khi và chỉ khi $AB = -BA$.

Câu 4. Cho ma trận vuông A cấp n có các phần tử trên đường chéo chính bằng không các phần tử còn lại bằng 1 hoặc 2000. Chứng minh rằng hạng của A bằng n hoặc bằng $n-1$.

Câu 5. Cho $a, b \in \mathbf{R}$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$xP(x-a) = (x-b)P(x)$$

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN 2001

MÔN THI: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

hãy tìm tất cả ma trận vuông B cấp 3 sao cho $AB + BA = 0$

Câu 2. Cho các ma trận vuông thực A, B và thỏa mãn các điều kiện sau $A^{2001} = 0,\ AB = A + B$. Chứng minh rằng $\det B = 0$.

Câu 3. Cho a, b, c, d, e là các số thực. Chứng minh minh rằng nếu phương trình $ax^2 + (b+c)x + d + e = 0$ có nghiệm thực trên $[1, +\infty)$ thì phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ cũng có nghiệm thực.

Câu 4. Kí hiệu (a, b) là tích vô hướng của hai véc tơ $(a, b) \in \mathbf{R}^n$. Cho các véc tơ $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbf{R}^n$ độc lập tuyến tính. Đặt

$$A = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_k) \\ a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \ldots & (a_k, a_k) \end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng

1) $\det(A) \neq 0$ 2) A là ma trận đối xứng và có các giá trị riêng không âm.

Câu 5. Cho ma trận A vuông cấp n có các phần tử đều là những số nguyên chẵn. Chứng minh rằng ma trận A không thể có giá trị riêng là một số nguyên lẻ.

Câu 6. Cho $a, b \in \mathbf{R}$ với $a \neq b$. Tính định thức của ma trận vuông cấp n như sau:

$$\begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a+b \end{pmatrix}$$

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN 2002

MÔN THI: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_{2001} + bx_{2002} = 1 \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_{2001} + bx_{2002} = 2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_{2001} + bx_{2002} = 2001 \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_{2001} + ax_{2002} = 2002 \end{cases}$$

Tìm điều kiện của a, b để hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Câu 2. Cho $\quad A = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 & -\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$

Tính A^{2002}.

Câu 3. Cho hệ phương trình tuyến tính có 10 phương trình và 11 ẩn số. Biết rằng:

1) Bộ số $(1999, 1993, \dots, 2002)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.

2) Khi xóa cột thứ i trong ma trận hệ số của hệ phương trình đã cho thì ta được một ma trận vuông có định thức đúng bằng j $(j = 1, 2, , \dots, 11)$

Hãy tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Câu 4. Cho P, Q là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn điều kiện sau:

$$P^2 = P,\ Q^2 = Q$$

và $I - (P + Q)$ khả nghịch. Chứng minh rằng $r(P) = r(Q)$.

Câu 5. Tồn tại hay không một đa thức $P(x)$ bậc 2002 sao cho $P(x^2 - 2001)$ chia hết cho $P(x)$.

Câu 6. Cho B là ma trận thực vuông cấp n có hạng bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất số thực λ sao cho $B^2 = \lambda B$.

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN 2003

MÔN THI: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

với a, b là các số thực, $a > |b|$. Hãy chỉ ra rằng mọi giá trị riêng của A đều là các số thực dương.

Câu 2. Biết rằng mọi giá trị riêng của ma trận đối xứng đều có các giá trị riêng là số thực. Chứng minh rằng nếu α, β, γ là các số thực khác không và a, b, c, d, p, q là các số thực tùy ý, thì ma trận

$$B = \begin{pmatrix} a & b\frac{\alpha}{\beta} & c\frac{\alpha}{\gamma} \\ b\frac{\beta}{\alpha} & d & p\frac{\beta}{\gamma} \\ c\frac{\gamma}{\alpha} & p\frac{\gamma}{\beta} & q \end{pmatrix}$$

cũng có các giá trị riêng là số thực.

Câu 3. Tính tổng $S_n = d_2 + d_3 + \cdots + d_n$, trong đó d_k là các định thức cấp k $(k = 2, 3, \ldots, n)$ dạng:

$$d_k = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \ldots & x & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x & x & \ldots & & x \\ 1 & x & x & \ldots & x & 0 \end{vmatrix}$$

Câu 4. Cho P và Q là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn các điều kiện sau: $PQ = QP$ và tồn tại các số nguyên dương s, r sao cho $P^s = Q^r = 0$. Chứng minh rằng các ma trận $E + (P + Q)$ và $E - (P + Q)$ là các ma trận khả nghịch.

Câu 5. Cho A là ma trận vuông thỏa mãn điều kiện $A^{2003} = 0$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có $rankA = rank(A + A^2 + \cdots + A^n)$.

Câu 6. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 + x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 + x_4 \end{pmatrix}$$

trong đó x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của đa thức $f(x) = x^4 - x + 1$. Tính $\det A$.

Câu 7. Cho đa thức với hệ số thực $P(x)$ bậc n $(n \geq 1)$ có m nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức

$$Q(x) = (x^2 + 1)P(x) + P'(x)$$

có ít nhất m nghiệm thực.

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN 2004

MÔN THI: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1. Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Tính $B = T^{-1}AT$

b) Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận A.

Câu 2. Chứng minh rằng với mọi ma trận vuông thực cấp hai A, B, C ta luôn có

$$(AB - BA)^{2004}C = C(AB - BA)^{2004}$$

Câu 3. Biết rằng các ma trận vuông A, B đều là nghiệm của đa thức $f(x) = x^2 - x$ và $AB + BA = 0$. Tính $\det(A - B)$?

Câu 4. Cho ma trận thực $A = (a_{ij})$ thỏa mãn điều kiện :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \ i = j \\ \pm 1 & \text{nếu } \ i \neq j \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

a) Nếu $n = 3$, thì tồn tại ma trận A để sao cho $\det A = 0$.

b) Nếu $n = 4$ ta luôn có $\det A \neq 0$.

Câu 5. a) Xác định đa thức $f(x)$ dạng:

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + c$$

biết rằng nó chia hết cho đa thức $(x-1)(x+1)(x-2)$.

b) Cho $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ là các đa thức có hệ số thực có bậc tương ứng là $3, 2, 3$ thỏa mãn điều kiện $[P(x)+Q(x)]^2 = [R(x)]^2$. Hỏi đa thức $T(x) = P(x)Q(x)R(x)$ có ít nhất bo nhiêu nghiệm thực (kể cả bội).

CÁC BÀI TẬP KHÁC

TÍNH ĐỊNH THỨC

1. Tính định thức bằng sử dụng các biến đổi sơ cấp

Bài 1 Tính định thức của ma trận $A = (a_{ij})$ với $a_{ij} = \min\{i, j\}$.

Hướng dẫn: Lấy hàng n trừ hàng $n-1$, . . . , hàng 2 trừ hàng 1 thu được định thức tam giác

Đáp số: 1.

Bài 2 Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ với $a_{ij} = \max(i, j)$. Tính $\det A$

Hướng dẫn: Lấy các cột $1, 2, \ldots, n-1$ trừ đi cột đứng sau nó, thu được định thức tam giác.

Đáp số: $n(-1)^{n-1}$.

Bài 3 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \ldots & x \\ x & a_2 & x & \ldots & x \\ x & x & a_3 & \ldots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy hàng $2, 3, \ldots n$ trừ hàng 1, sau đó rút thừa số $(a_j - x)$ khỏi cột j, và đưa về được định thức tam giác

Bài 4 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Cộng hàng 1 vào các hàng $2, 3, \dots n$, được ma trận tam giác

Bài 5 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy hàng n trừ hàng $n-1$, hàng $n-1$ trừ hàng $n-2$, . . . , hàng 2 trừ hàng 1, được định thức tam giác.

Bài 6 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n - b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy cột n trừ cột $n+1$, cột $n-1$ trừ cột n, . . . , cột 1 trừ cột 2, được định thức tam giác.

Bài 7 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy cột $n-1$ cộng vào cột n, cột $n-2$ cộng vào cột $n-1$, . . . , cột 1 cộng vào cột 2, được định thức tam giác.

Bài 8 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy cột thứ j $(j = 2, 3 \dots, n)$ trừ j lần cột 1, được định thức tam giác.

Bài 9 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+1-x \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy cột thứ j $(j = 2, 3 \dots, n+1)$ trừ cột 1, được định thức tam giác.

Bài 10 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Rút thừa số a_0 khỏi cột 1, sau đó lấy cột thứ j ($j = 2, 3 \ldots, n+1$) trừ a_j lần cột 1, được định thức tam giác.

Bài 11 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \ldots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy các hàng $2, 3, \ldots, n$ trừ đi hàng 1, thu được định thức tam giác.

Đáp số: $(n-1)!$

Bài 12 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy các hàng $2, 3, \ldots, n$ trừ đi hàng 1, thu được định thức tam giác.

Đáp số: $b_1 b_2 \ldots b_n$

Bài 13 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \ldots & 3 & 2 & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & n-1 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy các cột $1, 2, \ldots, n-1$ trừ đi cột n, thu được định thức tam giác.

Đáp số: $(-1)^{\frac{n^2-n+2}{2}} 2(n-2)!$

Bài 14 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \ldots & n \\ n & 2 & n & \ldots & n \\ n & n & 3 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \ldots & n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy các hàng (cột) $1, 2, \ldots, n-1$ trừ đi hàng (cột) n, thu được định thức tam giác.

Đáp số: $(-1)^{n-1} n!$

Bài 15 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: *Khai triển theo cột* 1

Đáp số: $x^n + (-1)^{n+1}y^n$.

Bài 16 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: *Cộng* n *hàng* $2, 3, \dots, n+1$ *vào hàng* 1*, sau đó khai triển theo hàng* 1.

Đáp số: 1.

Bài 17 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: *Lấy hàng* 1 *trừ hàng* 2*, hàng* 2 *trừ hàng* 3*, . . . , hàng* n *trừ hàng* $n+1$*, sau đó khai triển theo cột cuối.*

Đáp số: $(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$.

Bài 18 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: *Nhân hàng* 1 *với* x^n*, nhân hàng* 2 *với* x^{n-1}*, . . . , nhân hàng* n *với* x*, rồi cộng tất cả vào hàng* $n+1$*, sau đó khai triển theo hàng cuối cùng.*

Đáp số: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

Bài 19 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: *Tương tự bài* **18**.

Đáp số: $\dfrac{x^{n+1} - 1}{(x-1)^2} - \dfrac{n+1}{x-1}$.

Bài 20 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: *Tương tự bài* **18**.

Đáp số: $\dfrac{nx^n}{x-1} - \dfrac{x^n - 1}{(x-1)^2}$.

Bài 21 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy hàng 1 *trừ đi* x *lần hàng* 2*, sau đó lấy hàng* 2 *trừ đi* x *lần hàng* $3, \dots$ *, lấy hàng* n *trừ đi* x *lần hàng* $n+1$*, được định thức tam giác*

Đáp số: $(1 - a_{11}x)(1 - a_{22}x)\dots(1 - a_{nn}x)$.

Bài 22 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy cột k $(k = 2, 3, \dots n+1)$ *nhân với* $(-1)^k$ *rồi cộng vào cột* 1*, sau đó khai triển theo cột* 1.

Đáp số: $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}[a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n]$.

Bài 23 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy các hàng $2, 3, \dots, n$ *trừ* x *lần hàng* 1*, sau đó lấy* x *lần hàng* 1 *và các hàng* $2, 3, \dots, n-1$ *cộng vào hàng* n*, liên tiếp khai triển theo hàng cuối cột cuối.*

Đáp số: $(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$.

Bài 24 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: *Cộng các cột $2, 3, \dots, n+1$ vào cột 1, sau đó rút thừa số chung của cột 1 ra ngoài, và lần lượt lấy hàng $2, 3, \dots n+1$ trừ đi hàng 1, thu được định thức tam giác.*

Đáp số: $(x + a_1 + a_2 + \dots + a_n)(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$.

Bài 25 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: *Bước 1, lấy hàng n trừ hàng $n-1$, hàng $n-1$ trừ hàng $n-2$, . . . , hàng 2 trừ hàng 1. Sau đó khai triển theo cột 1. Bước 2 lấy hàng $n-1$ trừ hàng $n-2$, hàng $n-2$ trừ hàng $n-3$, . . . , hàng 2 trừ hàng 1. Tiếp tục khai triển theo cột 1. Bước $3, 4, \dots$ thực hiện tương tự.*

Đáp số: 1.

Bài 26 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ C_m^1 & C_{m+1}^1 & C_{m+2}^1 & \dots & C_{m+n}^1 \\ C_{m+1}^2 & C_{m+2}^2 & C_{m+3}^2 & \dots & C_{m+n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m+n-1}^n & C_{m+n}^n & C_{m+n+1}^n & \dots & C_{m+2n-1}^n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: *Bước 1, lấy cột $n+1$ trừ cột n, cột n trừ cột $n-1$, . . . , cột 2 trừ cột 1. Sau đó khai triển theo hàng 1. Bước 2, lấy cột n trừ cột $n-1$, cột $n-1$ trừ cột $n-2$, . . . , cột 2 trừ cột 1. Tiếp tục khai triển theo hàng 1. Bước $3, 4, \dots$ thực hiện tương tự.*

Đáp số: 1.

Bài 27 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: *Lấy cột i, $i = 2, 3 \dots n$ nhân với $(-1)^{i-1}$* rồi cộng vào cộng 1. *Sử dụng* $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k = (1-1)^m = 0$ và $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k = (1-1)^n - (-1)^n = (-1)^{n+1}$. *Sau đó khai triển theo cột 1, thu được định thức tam giác.*

Đáp số: 1.

Bài 28 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^n \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & \dots & C_{n+1}^n \\ 1 & C_{n+2}^1 & C_{n+2}^2 & \dots & C_{n+2}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_{2n}^1 & C_{2n}^2 & \dots & C_{2n}^n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: *Bước 1, lấy hàng n trừ hàng $n-1$, hàng $n-1$ trừ hàng $n-2$, . . . , hàng 2 trừ hàng 1. Sau đó khai triển theo cột 1. Bước 2 lấy hàng $n-1$ trừ hàng $n-2$, hàng $n-2$ trừ hàng $n-3$, . . . , hàng 2 trừ hàng 1. Tiếp tục khai triển theo cột 1. Bước $3, 4, \dots$ thực hiện tương tự.*

Đáp số: 1.

Bài 29 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} C_{p+n}^n & C_{p+n+1}^n & C_{p+n+2}^n & \dots & C_{p+2n}^n \\ C_{p+n+1}^n & C_{p+n+2}^n & C_{p+n+3}^n & \dots & C_{p+2n+1}^n \\ C_{p+n+2}^n & C_{p+n+3}^n & C_{p+n+4}^n & \dots & C_{p+2n+2}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{p+2n}^n & C_{p+2n+1}^n & C_{p+2n+2}^n & \dots & C_{p+3n}^n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Bước 1: Lấy các hàng kể từ hàng thứ hai trở đi trừ đi hàng liền trên của nó. Bước hai với kết qủa thu được bắt đầu từ hàng thứ ba trở đi trừ hàng liền trên của nó. Bước $3, 4, \dots n$ thực hiện tương tự. Từ kết qủa thu được ta tính được định thức.

Đáp số: $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Bài 30 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} C_m^p & C_m^{p+1} & C_m^{p+2} & \dots & C_m^{p+n} \\ C_{m+1}^p & C_{m+1}^{p+1} & C_{m+1}^{p+2} & \dots & C_{m+1}^{p+n} \\ C_{m+2}^p & C_{m+2}^{p+1} & C_{m+2}^{p+2} & \dots & C_{m+2}^{p+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m+n}^p & C_{m+n}^{p+1} & C_{m+n}^{p+2} & \dots & C_{m+n}^{p+n} \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Sử dụng công thức $C_n^k = \dfrac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$, chúng ta rút thừa số chung m từ hàng 1, thừa số $m+1$ từ hàng 2, . . . , thừa số $m+n$ từ cột cuối, đồng thời rút thừa số $\dfrac{1}{p}$ từ cột 1, thừa số $\dfrac{1}{p+1}$ từ cột thứ hai, . . . , thừa số $\frac{1}{p+n}$ từ cột cuối. Với kết quả thu được biến đổi tương tự

Đáp số: $\dfrac{C_{m+n}^{n+1} C_{m+n-1}^{n+1} \cdots C_{m+n-p+1}^{n+1}}{C_{n+p}^{n+1} C_{n+p-1}^{n+1} \cdots C_{n+1}^{n+1}}$.

Bài 31 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} n!a_0 & (n-1)!a_1 & (n-2)!a_2 & \dots & a_n \\ -n & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy hàng 2 nhân $(n-1)!$, hàng 3 nhân $(n-2)!$, . . . Sau đó rút thừa số chung $n!$ ở cột 1, $(n-1)!$ ở cột 2, . . .

Đáp số: $n!(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \cdots + a_n)$.

Bài 32 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-1}x & a_n \\ a_0x & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0x^2 & a_1x & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_0x^{n-1} & a_1x^{n-2} & a_2x^{n-3} & \dots & b_{n-1} & 0 \\ a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \dots & a_{n-1}x & b_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy hàng 2 nhân x^{n-1}, hàng 3 nhân x^{n-2}, . . . Sau đó rút thừa số chung x^n ở cột 1, x^{n-1} ở cột 2, . . .

Đáp số: $a_0x^n\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$.

Bài 33 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1\\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy hàng 2 trừ hàng 1, hàng 3 trừ hàng 2, . . . hàng n trừ hàng $n-1$. Sau đó lấy cột $2,3,\dots,n$ cộng vào cột 1, khai triển theo cột 1, . . .

Đáp số: $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n+1}{2}n^{n-1}$.

Bài 34 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-2} & x^{n-1}\\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-3} & x^{n-2}\\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \dots & x^{n-4} & x^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ x & x^2 & x^3 & \dots & x^{n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy hàng 2 trừ x^{n-1} lần hàng 1, hàng 3 trừ x^{n-2} hàng 1, . . . , hàng n trừ x lần hàng 1, thu được định thức tam giác

Đáp số: $(1-x^n)^{n-1}$.

Bài 35 Cho ma trận vuông cấp n, $A=(a_{ij})_{n\times n}$, trong đó $a_{ij}=|i-j|$. Tính $\det A$.

Hướng dẫn: Lấy các hàng $2,3,\dots,n$ trừ đi hàng đứng trước nó , sau đó lấy các hàng $2,3,\dots,n$ cộng vào hàng 1, rồi khai triển theo hàng 1.

Đáp số: $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

2. Tính định thức bằng phương pháp truy hồi

Bài 36 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n\\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n\\ a_1b_2 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Chứng minh rằng $D_n=\dfrac{b_n}{b_{n-1}}(a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n)D_{n-1}$.

Bài 37 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Chứng minh rằng $D_{n+1} = x_n D_n + a_n y_1 y_2 \dots y_n$.

Bài 38 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: $D_{n+1} = a_n D_n - a_1 a_2 \dots a_{n-1}$. *Hãy giải cách khác.*

Bài 39 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy cột n *trừ đi* $n-1$ *và trừ cột* 1, *sau đó khai triển theo cột cuối ta thu được* $D_n = (-x)D_{n-1}$

Đáp số: $(-1)^{n-1}x^{n-2}$.

Bài 40 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ x & x & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Sử dụng $1 = x + (1-x)$ *tách* D *thành hai số hạng và sử dụng bài trước*

Đáp số: $(-1)^n[(x-1)^n - x^n]$.

Bài 41 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Khai triển theo cột 2 *thu được* $D_n = a_1 D_{n-1} + (-1)^n$.

Cách khác: Thực hiện biến đổi $L_2 - a_1 L_3 + a_1 a_2 L_4 - \ldots + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \dots a_{n-1} L_{n+1} + (-1)^{n+2} a_1 a_2 \dots a_n L_1 \longrightarrow L_2$, *sau đó rút thừa số chung khỏi dòng 2, sử dụng dòng 2 khử các phần tử cột 1*

Đáp số: $a_1 a_2 \dots a_n - a_1 a_2 \dots a_{n-1} + a_1 a_2 \dots a_{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} a_1 + (-1)^n$.

Bài 42 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Chứng minh rằng $D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$.

Bài 43 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Chứng minh rằng $D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2},\ n \geq 2$.

Bài 44 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Chứng minh rằng $D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$.

Bài 45 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Chứng minh $D_n = \dfrac{2}{x}D_{n-1} - \dfrac{1}{x^2}D_{n-2}$

Đáp số: $\dfrac{n+1}{x^n}$.

Bài 46 Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Sử dụng $0 = x - x$ để tách hàng 1, từ đó chỉ ra được $D_n = -xD_{n-1} + x(-y)^{n-1}$ (Tương tự $D_n = -yD_{n-1} + y(-x)^{n-1}$).

Đáp số: $(-1)^{n-1}xy\dfrac{x^{n-1} - y^{n-1}}{x - y}$.

Bài 47 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Sử dụng $a = x + (a - x)$ để tách hàng 1, từ đó chỉ ra được $D_n = (a-x)D_{n-1} + x(a-y)^{n-1}$ (Tương tự $D_n = (a-y)D_{n-1} + y(a-x)^{n-1}$).

Đáp số: $\dfrac{x(a-y)^n - y(a-x)^n}{x-y}$.

Bài 48 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ y & a_2 & x & \dots & x \\ y & y & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Sử dụng $a_n = y + (a_n - y)$ để tách hàng n, từ đó chỉ ra được $D_n = (a_n - y)D_{n-1} + y(a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_{n-1} - x)$ (Tương tự $D_n = (a_n - x)D_{n-1} + x(a_1 - y)(a_2 - y)\dots(a_{n-1} - y)$).

Đáp số: $\dfrac{xf(y) - yf(x)}{x-y}$ *với* $f(z) = (a_1 - z)(a_2 - z)\dots(a_n - z)$.

Bài 49 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & x & x & \dots & x \\ 1 & y & a_2 & x & \dots & x \\ 1 & y & y & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y & y & y & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy các hàng $2, 3, \dots, n+1$ trừ đi x lần hàng 1, sau đó lấy hàng 2 trừ hàng 3, hàng 3 trừ hàng 4, . . . , hàng n trừ hàng $n+1$. Khai triển kết qủa thu được theo cột 1, rồi theo cột cuối, thu được công thức $D_n = (a_n - x)D_{n-1} - (a_1 - y)(a_2 - y)\dots(a_{n-1} - y)$.

Đáp số: $\dfrac{f(x) - f(y)}{x-y}$ *với* $f(z) = (a_1 - z)(a_2 - z)\dots(a_n - z)$

Bài 50 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Chứng minh rằng $D_n(x) = (x + n - 1)D_{n-1}(x - 1)$

Đáp số: $\prod\limits_{k=1}^{n}(x+n-2k+1)$ *hay là* $(x^2-1)(x^2-3^2)\dots[x^2-(n-1)^2]$ *khi n chẵn,* $x(x^2-2^2)(x^2-4^2)\dots[x^2-(n-1)^2]$ *khi n lẻ.*

Bài 51 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Khai triển theo cột cuối thu được $D_n = a_nD_{n-1} - a_1a_2\dots a_{n-1}$. Cách khác: Rút thừa số a_i khỏi cột $i+1$ sau đó dùng phép khử.

Đáp số: $a_1a_2\dots a_n\Big(a_0 - \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2} - \dots - \dfrac{1}{a_n}\Big)$.

Bài 52 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} c_0 & b & b & b & \dots & b \\ a & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a & 0 & 0 & 0 & \dots & c_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Quy về bài trước

Đáp số: $abc_1c_2\dots c_n\Big(\dfrac{c_0}{ab} - \dfrac{1}{c_1} - \dfrac{1}{c_2} - \dots - \dfrac{1}{c_n}\Big)$.

Bài 53 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -b & -b & -b & \dots & -b \\ 1 & na & -2b & -3b & \dots & -(n-1)b \\ 1 & (n-1)a & a & -3b & \dots & -(n-1)b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2a & a & a & \dots & a \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy các hàng $1, 2, \dots, n-1$ *trừ đi hàng bên dưới của nó, khai triển kết qủa thu được theo cột* 1 *ta quy về được bài trước.*

Đáp số: $a(a+b)(a+2b)\dots[a+(n-1)b]\Big(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+2b} + \dots + \dfrac{1}{a+(n-1)b}\Big)$.

Bài 54 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Chứng minh rằng $D_n = 1 - b_1D_{n-1}$.

Đáp số: $1 - b_1 + b_1b_2 - \dots + (-1)^n b_1b_2\dots b_n$.

Bài 55 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & 0 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & 0 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy hàng 1 *trừ hàng* 2*, hàng* 2 *trừ hàng* $3, \dots,$ *hàng* $n-1$ *trừ hàng* n*. Khai triển kết quả thu được theo cột* 1 *được* $D_n = -b_1D_{n-1} + (-1)^{n+1}b_1a_2a_3\dots a_n$.

Đáp số: $(-1)^{n-1}(b_1a_2a_3\dots a_n + b_1b_2a_3\dots a_n + \dots + b_1b_2b_3\dots a_n)$.

Bài 56 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Chứng minh rằng $D_n = (a_{n-1} + a_n)D_{n-1} - a_{n-1}^2 D_{n-2}$

Đáp số: $a_0a_1a_2\dots a_n\Big(\dfrac{1}{a_0}+\dfrac{1}{a_1}+\dots+\dfrac{1}{a_n}\Big)$.

Bài 57 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix}1 & C_p^1 & C_p^2 & \dots & C_p^n\\ 1 & C_{p+1}^1 & C_{p+1}^2 & \dots & C_{p+1}^n\\ 1 & C_{p+2}^1 & C_{p+2}^2 & \dots & C_{p+2}^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & C_{p+n}^1 & C_{p+n}^2 & \dots & C_{p+n}^n\end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy hàng $n+1$ trừ hàng n, hàng n trừ hàng $n-1$, . . . , hàng 2 trừ hàng 1, thu được $D_n = D_{n-1}$

Đáp số: 1

Bài 58 Tính định thức

$$\begin{vmatrix}C_n^0 & C_n^1 & \dots & C_n^k\\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{n+k}^0 & C_{n+k}^1 & \dots & C_{n+k}^k\end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Xem bài trên

Bài 59 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 1 & C_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x\\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 & x^2\\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \dots & 0 & x^3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-1} & x^n\end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy hàng $n+1$ trừ hàng n, hàng n trừ hàng $n-1$, . . . , hàng 2 trừ hàng 1, sau đó khai triển theo cột 1. Chứng minh được $D_n = (x-1)D_{n-1}$

Đáp số: $(x-1)^n$.

Bài 60 Tính định thức

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 1 & 1! & 0 & 0 & 0 & \dots & x\\ 1 & 2 & 2! & 0 & 0 & \dots & x^2\\ 1 & 3 & 3.2 & 3! & 0 & \dots & x^3\\ 1 & 4 & 4.3 & 4.3.2 & 4! & \dots & x^4\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & n(n-1)(n-2)(n-3) & \dots & x^n\end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Rút thừa số chung $k!$ từ cột $k+1$ và quy về bài trước.

Đáp số: $1!2!\dots(n-1)!(x-1)^n$.

Bài 61 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_0\\ 1 & C_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1\\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 & x_2\\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \dots & 0 & x_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-1} & x_n\end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Chứng minh $D_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n) = D_n(x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$.

Bài 62 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & C_2^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_3^2 & C_3^3 \dots & 0 & & \\ 1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_n^2 & C_n^3 & C_n^4 & \dots & C_n^n \\ 1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & C_{n+1}^4 & \dots & C_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy hàng n *trừ hàng* $n-1$, *hàng* $n-1$ *trừ đi hàng* $n-2$, . . . , *hàng* 2 *trừ hàng* 1. *Sau đó lấy hàng thứ* i, $i = 2, 3, \dots, n$ *nhân với* $(-1)^{i-1}$ *và cộng vào cột* 1, *sử dụng* $\sum_{i=1}^{k} (-1)^i C_n^i = -1$. *Khai triển theo hàng* 1 *ta thu được* $D_n = D_{n-1} + 1$

Đáp số: n.

3. Tính định thức bằng cách tách hàng cột

Bài 63 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x + a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x + a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x + a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x + a_n \end{vmatrix}$$

Đáp số: $x^n + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)x^{n-1}$.

Bài 64 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Tách $x_i = (x_i - a_i) + a_i$

Đáp số: $(a_1 - x_1)(a_2 - x_2) \dots (a_n - x_n)\Big(1 + \dfrac{a_1}{x_1 - a_1} + \dfrac{a_2}{x_2 - a_2} + \dots + \dfrac{a_n}{x_n - a_n}\Big)$.

Bài 65 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x + 1 & x & x & \dots & x \\ x & x + 2 & x & \dots & x \\ x & x & x + 3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x + n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Tách dòng thứ i *thành dòng* $(x, x, \dots x)$ *và* $i(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, *khi đó* D *được tách thành* 2^n *số hạng, số hạng có* ≥ 2 *dòng chứa* x *có giá trị bằng không.*

Đáp số: $n!\Big(1 + x + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} + \dots + \dfrac{x}{n}\Big)$.

Bài 66 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+2 & x & \dots & x \\ x & x & x+4 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+2^n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Tách dòng thứ i thành dòng $(x, x, \dots x)$ và $2^i(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, khi đó D được tách thành 2^n số hạng, số hạng có ≥ 2 dòng chứa x có giá trị bằng không.

Đáp số: $2^{\frac{n(n+1)}{2}}\left[1 + x\Big(2 - \dfrac{1}{2^n}\Big)\right]$.

Bài 67 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \dots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Tách dòng thứ i thành dòng $(x, x, \dots x)$ và $\dfrac{1}{i}(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, khi đó D được tách thành 2^n số hạng, số hạng có ≥ 2 dòng chứa x có giá trị bằng không.

Đáp số: $\dfrac{1}{n!}\left[1 + \dfrac{n(n+1)}{2}x\right]$.

Bài 68 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+a & x & \dots & x \\ x & x & x+a^2 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+a^n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Tách dòng thứ i thành dòng $(x, x, \dots x)$ và $a^i(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, khi đó D được tách thành 2^n số hạng, số hạng có ≥ 2 dòng chứa x có giá trị bằng không.

Đáp số: $a^{\frac{n(n+1)}{2}}\left[1 + x\dfrac{a^{n+1}-1}{a^n(a-1)}\right]$.

Bài 69 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} (x_1-a_1)^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x_2-a_2)^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & (x_n-a_n)^2 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Tách $(x_i - a_i)^2 = (x_i^2 - 2x_ia_i) + a_i^2$, từ đó tách D thành 2^n số hạng, các số hạng có ít hơn $n-1$ cột chứa $(x_i^2 - 2x_ia_i)$ có giá trị bằng không.

Đáp số: $\left[1 + \sum\limits_{i=1} \dfrac{a_i^2}{x_i^2 - 2a_ix_i}\right] \prod\limits_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2a_ix_i)$.

Bài 70

$$D = \begin{vmatrix} (x_1-a_1)^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_n \\ a_2.a_1 & (x_2-a_2)^2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & (x_3-a_3)^2 & \dots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \dots & (x_n-a_n)^2 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Tách $(x_i - a_i)^2 = (x_i^2 - 2x_ia_i) + a_i^2$, từ đó tách D thành 2^n số hạng, các số hạng có ít hơn $n-1$ cột chứa $(x_i^2 - 2x_ia_i)$ có giá trị bằng không.

Đáp số: $\Big[1 + \sum\limits_{i=1} \dfrac{a_i^2}{x_i^2 - 2a_ix_i}\Big] \prod\limits_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2a_ix_i)$.

Bài 71 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Tách hàng 1: $0 = 1 - 1$

Đáp số: $(a_1 - x_1)(a_2 - x_2)\dots(a_n - x_n) - a_1a_2\dots a_n$.

Bài 72 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \dots & a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Tách $x_i = (x_i - a_ib_i) + a_ib_i$

Đáp số: $(x_1 - a_1b_1)(x_2 - a_2b_2)\dots(x_n - a_nb_n)\Big(1 + \dfrac{a_1b_1}{x_1} + \dfrac{a_2b_2}{x_2} + \dots + \dfrac{a_nb_n}{x_n}\Big)$.

Bài 73 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & \dots & 1 + x_1y_n \\ 1 + x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \dots & 1 + x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 + x_ny_1 & 1 + x_ny_2 & \dots & 1 + x_ny_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Với $n \geq 3$ tách hàng thứ i của D thành hai hàng $(1, 1, \dots, 1)$ và $(x_iy_1, x_iy_2, \dots, x_iy_n)$, khi đó$D$ tách thành 2^n định thức. Các định thức đó có ít nhất hai hàng tỉ lệ nên có giá trị bằng không, suy ra $D = 0$. $n = 1, n = 2$ tính trực tiếp. Có thể chỉ tách hàng 1 rồi dùng phép khử.

Bài 74 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 + a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & 1 + a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & 1 + a_n + b_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Tách hàng thứ i thành hai hàng $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ và $(a_i + b_1, a_i + b_2, \dots, a_i + b_n)$, từ đó tách D thành 2^n số hạng. Mỗi số hạng có ít hơn $n-2$ hàng đơn vị thì có giá trị bằng không (Tương tự bài 73*).*

Đáp số: $1 + \sum\limits_{i=1}^{n}(a_i + b_i) + \sum\limits_{1 \leq i < k \leq n} (a_i - a_k)(b_i - b_k)$.

Bài 75 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & \dots & 1 + x_1y_n \\ 1 + x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & 1 + x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + x_ny_1 & 1 + x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Sử dụng $x_iy_i = (-1) + (1 + x_iy_i)$ và tách định thức tương tự bài **74**.

Đáp số: $(-1)^n\Big[1 - n - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{1\le i<k\le n} (x_i - x_k)(y_i - y_k)\Big].$

Bài 76 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x_1 + a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 + a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & x_n + a_nb_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Tách các cột

Đáp số: $x_1x_2\dots x_n\Big(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_ib_i}{x_i}\Big).$

Bài 77 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a^p - x & a^{p+1} - x & \dots & a^{p+n-1} - x \\ a^{p+n} - x & a^{p+n+1} - x & \dots & a^{p+2n-1} - x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{p+n(n-1)} - x & a^{p+n(n-1)+1} - x & \dots & a^{p+n^2-1} - x \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Tách dòng thứ i thành hiệu hai dòng $a^{p+(i-1)n}(1,,\dots,a^n)$ và $x(1,1,\dots,1)$, khi đó D được tách thành 2^n số hạng. $n \ge 3$ các số hạng đều bằng không. $n = 1,2$ tính trực tiếp.

Bài 78 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1-x & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a & a^2 - x & a^3 & \dots & a^n \\ a^2 & a^3 & a^4 - x & \dots & a^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n-1} & a^n & a^{n+1} & \dots & a^{2n-2} - x \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Tách hàng thứ i thành hai hàng $a^{i-1}(1,a,\dots,a^{n-1})$ và $(0,0,\dots,-x,\dots,0)$, khi đó D tách thành tổng 2^n số hạng, mỗi số hạng có $\le n-2$ dòng chứa x thì có giá trị bằng không.

Đáp số: $(-1)^n\Big[x^n - x^{n-1}\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\Big]$

4. Định thức Vandermon

Bài 79 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-1} & \frac{x_2}{x_2-1} & \dots & \frac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Sử dụng $x_i^k = (x_i^k - x_i^{k-1})\frac{x_i}{x_i-1}$ để rút thừa số $\frac{x_i}{x_i-1}$ ra khỏi cột i, phần còn lại đưa về được định thức Vandermon

Đáp số: $\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i-1} \prod_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j).$

Bài 80 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Với $b_i \neq 0$ ta rút thừa số b_i^n ra khỏi hàng thứ i, thu được định thức Vandermon.

Đáp số: $\prod\limits_{1 \le i < k \le n} (a_i b_k - a_k b_i)$.

Bài 81 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ a_2 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Khai triển định thức theo cột 1, các số hạng thu được đều là định thức Vandermon

Đáp số: $(-1)^{n-1} \prod\limits_{i=1}^{n} x_i \prod\limits_{1 \le i < k \le n} (x_k - x_i) \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{x_i f'(x_i)} \right]$ *ở đây* $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$.

Bài 82 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Xét định thức Vandermon

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \\ 1 & y & y^2 & \dots & y^n \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức theo hàng cuối, suy ra hệ số của y^{n-1} là $(-1)D$.

Đáp số: $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \prod\limits_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

Bài 83 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Xét định thức Vandermon

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \\ 1 & y & y^2 & \dots & y^n \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức theo hàng cuối, suy ra hệ số của y là $(-1)^{n+3}D$.

Đáp số: $x_1x_2\dots x_n\Big(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\Big)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$.

Bài 84 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1-1) & x_1^2(x_1-1) & \dots & x_1^{n-1}(x_1-1)\\ 1 & x_2(x_2-1) & x_2^2(x_2-1) & \dots & x_2^{n-1}(x_2-1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_n(x_n-1) & x_n^2(x_n-1) & \dots & x_n^{n-1}(x_n-1)\end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Sử dụng $1=x_i-(x_i-1)$ để tách cột 1, D tách thành hiệu, rút thừa số chung trong các hàng của mỗi số hạng thu được định thức Vandermon

Đáp số: $[x_1x_2\dots x_n-(x_1-1)(x_2-1)\dots(x_n-1)]\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$.

Bài 85 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n\\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \dots & 1+x_n^n\end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Lấy cột n trừ cột $n-1$, cột $n-1$ trừ cột $n-2$, . . . , cột 2 trừ cột 1. Sau đó sử dụng $1=x_i-(x_i-1)$ để tách cột 1, D tách thành hiệu, rút thừa số chung trong các hàng của mỗi số hạng thu được định thức Vandermon

Đáp số: $[2x_1x_2\dots x_n-(x_1-1)(x_2-1)\dots(x_n-1)]\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$.

Bài 86 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cos 2\varphi_1 & \dots & \cos(n-1)\varphi_1\\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos 2\varphi_2 & \dots & \cos(n-1)\varphi_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & \cos\varphi_n & \cos 2\varphi_n & \dots & \cos(n-1)\varphi_n\end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Biểu diễn $\cos k\varphi$ thành đa thức của $\cos\varphi$ với số hạng cấp cao nhất là $2^k\cos^k\varphi$ (có thể dùng công thức Moarvơ và đẳng thức $1+C_k^2+C_k^4+\dots=2^{k-1}$)

Đáp số: $2^{(n-1)^2}\prod_{1\le i<j\le n}\sin\frac{\varphi_i+\varphi_j}{2}\sin\frac{\varphi_i-\varphi_j}{2}$.

Bài 87 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix} \sin\varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & \dots & \sin n\varphi_1\\ \sin\varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & \dots & \sin n\varphi_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sin\varphi_n & \sin 2\varphi_n & \dots & \sin n\varphi_n\end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Biểu diễn $\sin k\varphi$ thành tích của $\sin\varphi$ và một đa thức của $\cos\varphi$ với số hạng cấp cao nhất là $2^{k-1}\cos^{k-1}\varphi$

Đáp số: $2^{n(n-1)}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_n\prod_{1\le i<j\le n}\sin\frac{\varphi_i+\varphi_j}{2}\sin\frac{\varphi_i-\varphi_j}{2}$.

Bài 88 Giả sử $a_1,a_2,\dots,a_n$ là các số nguyên. Đặt

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

Chứng minh rằng D chia hết cho $\sum\limits_{s=1}^{n-1} s!$.

5. Phương pháp nhân tử hoá

Bài 89 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \dots & (a_1+b_n)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \dots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Nếu $b_i = b_j,\ i \neq j$ *thì* $D = 0$ *nên* D *chứa thừa số* $(b_j - b_i)$. *vv...*

Cách khác: Rút thừa số chung $\dfrac{1}{a_i + b_n}$ *từ hàng thứ* i *ra ngoài. Sau đó lấy các hàng* $1, 2, \dots, n-1$ *trừ đi hàng* n. *Sử dụng biến đổi* $\dfrac{a_i + b_n}{a_i + b_j} - \dfrac{a_n + b_n}{a_n + b_j} = \dfrac{(a_n - a_i)(b_n - b_j)}{(a_i + b_j)(a_n + b_j)}$. *Rút thừa số chung* $(a_n - a_i)$ *khỏi hàng* i *và thừa số* $\dfrac{b_n - b_j}{a_n + b_j}$ *khỏi cột* j *ta được*

$$D_n = \frac{1}{a_n + b_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(a_n - a_i)(b_n - b_i)}{(a_n + b_i)(a_i + b_n)} D_{n-1}.$$

Đáp số: $\dfrac{\prod\limits_{1 \le i < j \le n} [(a_j - a_i)(b_j - b_i)]}{\prod\limits_{i,j=1}^{n} (a_i + b_j)}$.

Bài 90 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_1 - a_1} & \dfrac{1}{x_1 - a_2} & \dots & \dfrac{1}{x_1 - a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1}{x_n - a_1} & \dfrac{1}{x_n - a_2} & \dots & \dfrac{1}{x_n - a_n} \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn xem bài trước.

Đáp số: $\dfrac{\prod\limits_{1 \le i < j \le n} [(x_i - x_j)(a_j - a_i)]}{\prod\limits_{i,j=1}^{n} (x_i - a_j)}$.

Bài 91 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n} \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Xem bài trước

Đáp số: $\dfrac{[1!2!3!\dots(n-1)!]^3}{n!(n+1)!(n+2)!\dots(2n-1)!}$.

6. Tính định thức bằng phép phân tích ma trận thành tích hai ma trận

Bài 92 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix} \dfrac{1-a_1^nb_1^n}{1-a_1b_1} & \dfrac{1-a_1^nb_2^n}{1-a_1b_2} & \dots & \dfrac{1-a_1^nb_n^n}{1-a_1b_n} \\ \dfrac{1-a_2^nb_1^n}{1-a_2b_1} & \dfrac{1-a_2^nb_2^n}{1-a_2b_2} & \dots & \dfrac{1-a_2^nb_n^n}{1-a_2b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1-a_n^nb_1^n}{1-a_nb_1} & \dfrac{1-a_n^nb_2^n}{1-a_nb_2} & \dots & \dfrac{1-a_n^nb_n^n}{1-a_nb_n} \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Phân tích định thức thành tích của hai định thức Vandermon của hai bộ số $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ *và* $(b_1,b_2,\dots,b_n)$

Đáp số: $\displaystyle\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i).$

Bài 93 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \dots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \dots & (a_1+b_n)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \dots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Tương tự bài trước

Đáp số: $C_n^1C_n^2\dots C_n^n\displaystyle\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i).$

Bài 94 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix} 1^{n-1} & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \\ 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & (n+1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{n-1} & (n+1)^{n-1} & \dots & (2n-1)^{n-1} \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Xem bài trước

Đáp số: $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)!].$

Bài 95 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad s_k=x_1^k+x_2^k+\dots+x_n^k.$$

Hướng dẫn: Biểu diễn dưới dạng tích của hai định thức Vandermon của bộ số $x_1,x_2,\dots,x_n$

Đáp số: $\displaystyle\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)^2.$

Bài 96 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}, \quad s_k=x_1^k+x_2^k+\dots+x_n^k.$$

Hướng dẫn: Biểu diễn dưới dạng tích hai định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & x^n \end{vmatrix} \text{ và } \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Đáp số: $\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)^2.$

Bài 97 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Nhân vào bên trái của định thức đã cho định thức sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Đáp số $(a+b+c-x)(c-a-b-x)(a-b-c-x)(b-a-c-x)$.

Bài 98 Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\dots f(\varepsilon_n),$$

trong đó $f(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$ và $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ là các căn bậc n của đơn vị.

Hướng dẫn: Nhân vào bên phải định thức đã cho định thức Vandermon

$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \dots & \varepsilon_1^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & \dots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Bài 99 Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\dots f(\varepsilon_n),$$

trong đó $f(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$ và $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ là các căn bậc n của đơn vị.

Hướng dẫn: Xem bài trước

Bài 100 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & 2 & \dots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & a^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Áp dụng bài 93. Đối chiếu với bài **31**.

Đáp số: $(1-a^n)^{n-1}$.

Bài 101 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & C_n^1 & \dots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} \\ C_n^{n-1} & 1 & 1 & \dots & C_n^{n-3} & C_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Đáp số: $[1+(-1)^n]^n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ 2^n & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$.

Bài 102 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Sử dụng bài 99

Bài 103 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta & \dots & \cos n\theta \\ \cos n\theta & \cos\theta & \cos 2\theta & \dots & \cos(n-1)\theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta & \dots & \cos\theta \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Áp dụng bài **99**

Đáp số: $\dfrac{[\cos\theta - \cos(n+1)\theta]^n - (1-\cos n\theta)^n}{2(1-\cos\theta)} = 2^{n-2}\sin^{n-2}\dfrac{n\theta}{2}\Big[\sin^n\dfrac{(n+2)\theta}{2} - \sin^n\dfrac{n\theta}{2}\Big]$.

Bài 104 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ n^2 & 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\ (n-1)^2 & n^2 & 1^2 & \dots & (n-2)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots & 1^2 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Áp dụng bài **99**

Đáp số: $(-1)^{n-1}\dfrac{(n+1)(2n+1)n^{n-2}}{12}[(n+2)^n - n^n]$.

Bài 105 Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Nhân vào bên trái định thức đã cho định thức Vandermon

$$\begin{vmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_1^2 & \dots & \eta_1^{n-1} \\ 1 & \eta_2 & \eta_2^2 & \dots & \eta_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \eta_n & \eta_n^2 & \dots & \eta_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

trong đó $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ *là các căn bậc* n *của* -1

Đáp số: $f(\eta_1)f(\eta_2)\dots f(\eta_n)$ *với* $f(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$.

Bài 106 Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \dots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix} \quad \text{ở đây} \quad \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Hướng dẫn: Sử dụng

$$D^2 = \begin{vmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 0\dots & 0 & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{C_{n-1}^2} n^n$$

suy ra $D = \pm i^{C_{n-1}^2} n^{\frac{n}{2}}$ *và sử dụng kết quả của định thức Vandermon*

Đáp số: $(-1)^{C_n^2} i^{C_{n-1}^2} n^{\frac{n}{2}} = i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}} n^{\frac{n}{2}}$.

Bài 107 Tính định thức ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ với $a_{ij} = \dfrac{1}{(i+j-1)!}$

Hướng dẫn: rút các thừa số $\dfrac{1}{n!}$ *từ hàng 1,* $\dfrac{1}{(n+1)!}$ *từ hàng 2,. . . ,* $\dfrac{1}{(2n-1)!}$ *từ hàng* n*, thừa số* $(n-1)!$ *từ cột 1, thừa số* $(n-2)!$ *từ cột 2, . . . , thừa số* $1!$ *từ cột* n*, ta được*

$$\det A = \frac{1!2!\dots(n-1)!}{(n+1)!(n+2)!\dots(2n-1)!} \begin{vmatrix} C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^n \\ C_{n+1}^2 & C_{n+2}^3 & \dots & C_{n+1}^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{2n-1}^n & C_{2n-1}^{n+1} & \dots & C_{2n-1}^{2n-1} \end{vmatrix}$$

Sau đó lấy các hàng $2, 3, \dots, n$ *trừ đi hàng phía trên của nó. Tiếp theo lấy các hàng* $3, 4, \dots, n$ *trừ đi hàng phía trên đó. Cứ tiếp tục như vậy ta thu được định thức tam giác .*

Đáp số: $(-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} \dfrac{1!2!\dots(n-1)!}{(n+1)!(n+2)!\dots(2n-1)!}$.

Bài 108 Giả sử m và n là các số tự nhiên, $m > 1$, x_0, x_1, $\dots, x_{m-1}$ là các số thực. Giả sử $A_{m,n} = \{c_{ij}\}_{i,j=0}^{m^n-1}$ là ma trận vuông cỡ m^n với các phần tử $c_{ij} = x_{i_0}^{j_0} x_{i_1}^{j_1} \dots x_{i_{n-1}}^{j_{n-1}}$ trong đó

$i_0, i_1, \ldots, i_{n-1};\ j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}$ là các số nguyên trong đoạn $[0, m-1]$ xác định từ các đẳng thức

$$i = i_0 + m.i_1 + m^2.i_2 + \cdots + m^{n-1}.i_{n-1}$$
$$j = j_0 + m.j_1 + m^2.j_2 + \cdots + m^{n-1}.j_{n-1}$$

Tính định thức của ma trận $A_{m,n}$.

Bài 109 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} P(x) & P(x+1) & \ldots & P(x+n) \\ P'(x) & P'(x+1) & \ldots & P'(x+n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P^{(n)}(x) & P^{(n)}(x+1) & \ldots & P^{(n)}(x+n) \end{vmatrix}$$

với $P(x) = x(x+1)\ldots(x+n)$ và $n \in \mathbf{N}$.

Hướng dẫn: Nếu $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ *thì*

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 0 & na_0 & (n-1)a_1 & \ldots & a_1 \\ 0 & 0 & n(n-1)a_0 & \ldots & 2a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n!a_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x^n & (x+1)^n & (x+2)^n & \ldots & (x+n)^n \\ x^{n-1} & (x+1)^{n-1} & (x+2)^{n-1} & \ldots & (x+n)^{n-1} \\ x^{n-2} & (x+1)^{n-2} & (x+2)^{n-2} & \ldots & (x+n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Bài 110 a) Cho $P = (p_{ij})_{n\times n}$ với $p_{ij} = 1$ nếu i chia hết cho j, và $p_{ij} = 0$ nếu i không chia hết cho j. Hãy tính $\det P$.

b) Cho $Q = (q_{ij})_{n\times n}$ với q_{ij} là ước số chung lớn nhất của i và j. Hãy tính $\det Q$.

7. Đẳng thức và bất đẳng thức của định thức

Bài 111 Không tính giá trị của các định thức hãy chứng minh đẳng thức

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & c_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & b_2c_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & c_3b_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Chứng minh bằng quy nạp

Bài 112 Cho $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$
$p = x_1x_2\ldots x_n$.

Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} n+1 & s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \ldots & s_{2n} \end{vmatrix} = p^2 \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Biểu diễn VT là bình phương định thức Vandermon của bộ số $0, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Bài 113 Chứng minh rằng nếu

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

thì tích $D(x)D(-x)$ có thể biểu diễn được dưới dạng

$$\begin{vmatrix} A_{11}-x^2 & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-x^2 & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}-x^2 \end{vmatrix}$$

ở đây A_{ij} không phụ thuộc vào x. Tính A_{ij} thông qua a_{kl}.

Đáp số: $A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$.

Bài 114 Cho định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

và gọi A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}. Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & z \end{vmatrix} = Dz - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_iy_j.$$

Hướng dẫn: Khai triển theo dòng cuối và cột cuối.

Bài 115 Chứng minh rằng đối với ma trận cỡ 10×10

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 10^{-10} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

chúng ta có $\det(A - \lambda E) = \lambda^{10} - 10^{10}$.

Hướng dẫn: Khai triển theo cột 1.

Bài 116 Chứng minh rằng $n \geq 3$ thì

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{c_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{21} & c_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{2n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{n1} & c_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{n1} & c_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{1n} \\ c_{n1} & c_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Biến đổi:

$$VT = \frac{1}{c_{11}^{n-1}} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{11}c_{21} & c_{11}c_{22} & \dots & c_{11}c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{11}c_{n1} & c_{11}c_{n2} & \dots & c_{11}c_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{c_{11}^{n-1}} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} & \dots & c_{11}c_{2n} - c_{21}c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{11}c_{n2} - c_{n1}c_{12} & \dots & c_{11}c_{nn} - c_{n1}c_{1n} \end{vmatrix} = VF.$$

Bài 117 Tìm tổng tất cả các định thức cấp n trong đó trên mỗi dòng và mỗi cột có một phần tử bằng 1 còn lại bằng 0. Có bao nhiêu định thức như vậy.

Hướng dẫn: Chỉ ra rằng tổng là giá trị của định thức có các phần tử đều là 1 nên có kết qủa bằng không. Số số hạng bằng số các phép thế bậc n.

Bài 118 Chứng minh rằng định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 + y_1 & x_2 + y_1 & \dots & x_n + y_1 \\ (x_1 + y_1)(x_1 + y_2) & (x_2 + y_1)(x_2 + y_2) & \dots & (x_n + y_1)(x_n + y_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_1 + y_1)\dots(x_1 + y_{n-1}) & (x_2 + y_1)\dots(x_2 + y_{n-1}) & \dots & (x_n + y_1)\dots(x_n + y_{n-1}) \end{vmatrix}$$

không phụ thuộc vào $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$.

Hướng dẫn: Bước 1: lấy dòng 2 trừ y_1 dòng 1, dòng 3 trừ y_2 dòng 2, . . . , dòng n trừ y_{n-1} dòng $n-1$.

Bước 2: dòng 3 trừ y_1 dòng 2, dòng 4 trừ y_2 dòng 3,. . .

Bài 119 Chứng minh đẳng thức

$$\begin{vmatrix} s - a_1 & s - a_2 & \dots & s - a_n \\ s - a_n & s - a_1 & \dots & s - a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s - a_2 & s - a_3 & \dots & s - a_1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

ở đây $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Hướng dẫn: Lấy các cột $2, 3, \dots, n$ cộng vào cột 1, sau đó rút thừa số chung từ cột 1 ra ngoài. Sau đólấy cột $2, 3, \dots, n$ trừ cột 1...

Bài 120 Liệu có tồn tại ma trận cấp 12×12 chỉ gồm các số $-1,\ 0,\ 1$ có định thức bằng 1981.
Hướng dẫn: Phân tích $1981 = 2^{10} + a_1 2^9 + \dots + a_9.2 + a_{10},\ a_i = 0, 1$. Xét định thức:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{10} & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{10} & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Liên tiếp khai triển theo cột cuối ta thu được giá trị định thức là 1981.

Bài 121 Chứng minh rằng khi $n \geq 3$, định thức D cấp n có tất cả các phần tử bằng 1 hoặc -1 luôn thỏa mãn bất đẳng thức $|D| \leq (n-1)(n-1)!$.

Hướng dẫn: Chứng minh bằng quy nạp

Với $n = 3$, trong các định thức có các phần tử là ± 1 có giá trị khác không ta có thể đổi dấu các hàng $1, 2, 3$, sau đó đổi dấu cột $2, 3$ (chỉ làm định thức đổi dấu) để thu được một trong hai trường hợp

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \quad \text{hoặc} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Như vậy $|D| \leq 4 = (3-1)(3-1)!$

Sử dụng giả thiết quy nạp và khai triển D *theo dòng* 1

$|D| = | \pm M_{11} \pm M_{12} \pm \cdots \pm M_{1n}| \leq |M_{11}| + |M_{12}| + \cdots + |M_{1n}| \leq n(n-2)(n-2)! < (n-1)(n-1)!$

(vì $n(n-2) < (n-1)^2$*). Ta có kết quả.*

Bài 122 Tìm giá trị lớn nhất của định thức cấp 3 có hai phần tử bằng 4 các phần tử còn lại là 1 hoặc -1.

Hướng dẫn: Định thức $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 25$ *và ta sẽ chỉ ra đó là giá trị cần tìm.*

TH1: Nếu hai phần tử 4 *thuộc cùng một hàng hay một cột thì phần bù đại số của các phần tử thuộc hàng (cột) đó có giá trị tuyệt đối không quá* 2 *nên định thức không quá* $4.2 + 4 > 2 + 1.2 = 18$

TH2: Nếu hai phần tử 4 *không cùng hàng cùng cột. Ta thấy tổng các giá trị tuyệt đối của các số hạng trong khai triển Sarius là* $16 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1 = 27$ *và giá trị định thức là* 27 *nếu các số hạng cùng dương. Điều này không xảy ra vì tích các số hạng âm. Do* D *lẻ và* $|D| < 27$ *nên* $|D| \leq 25$.

Bài 123 Giả sử $A = (a_{ij})$ là ma trận cỡ $n \times n$ mà $a_{ij} = ij$. Tính $f'(0)$ với:

$$f(x) = \det(Ax + E).$$

Hướng dẫn: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ *nên* $f'(0) = c_1$.

Đáp số: $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Bài 124 Cho D là định thức cấp 2004, trong đó các phần tử của D là 0 hoặc 1 và mỗi hàng mỗi cột của D có đúng 1002 phần tử là 1. Chứng minh rằng D chia hết cho 1002^2.

Hướng dẫn: Cộng các hàng vào hàng 1*, rút thừa số chung* 1002 *ra ngoài. Khử các phần tử có giá trị* 1 *ở cột một. Khai triển theo cột* 1 *với kết qủa thu được cộng tất cả vào cột* 1 . . .

8. Ma trận suy biến, không suy biến

Bài 124 Cho D là định thức cấp 4, trong đó các phần tử của D là 0 hoặc 1 và mỗi hàng mỗi cột của D có đúng hai phần tử là 1. Chứng minh rằng $D = 0$.

Hướng dẫn: Hãy chỉ ra rằng có hai hàng của D *có tổng là* $(1, 1, 1, 1)$.

Bài 124 Cho $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ là các số thực khác nhau và khác với $0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ -n+1$. Chứng minh rằng định thức sau khác không

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_2} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_n} \\ \dfrac{1}{\lambda_1 + 1} & \dfrac{1}{\lambda_2 + 1} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_n + 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{\lambda_1 + n - 1} & \dfrac{1}{\lambda_2 + n - 1} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_n + n - 1} \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Xem bài **91**.

Bài 125 Chứng minh rằng định thức của một ma trận cấp lẻ bằng không nếu ma trận thỏa mãn điều kiện $a_{ij} = -a_{ji}$ (ma trận phản đối xứng).

Hướng dẫn: $\det A = \det A^T = \det(-A) = -\det A$ *nên* $\det A = 0$.

Bài 126 Giả sử A và B là các ma trận vuông cấp 1999. Chứng minh rằng nếu như $AB = 0$ thì ít nhất một trong hai ma trận $A + A^T$, $B + B^T$ là ma trận suy biến.

Hướng dẫn: Coi A, B *là các ma trận của các ánh xạ* $\varphi, \psi : \mathbf{R}^{1999} \longrightarrow \mathbf{R}^{1999}$. *Do* $AB = 0$ *nên* $\varphi\psi = 0$, *suy ra* $Im\psi \subset Ker\varphi$. *Vì vậy,* $r(B) = \dim(Im\psi) \leq \dim(Ker\varphi) = 1999 - r(A)$, *tức là* $r(A) + r(B) \leq 1999$. *Vậy một trong hai số* $r(A)$ *và* $r(B)$ *là* ≤ 999. *Nếu* $r(A) \leq 999$ *thì* $r(A + A^T) \leq r(A) + r(A^T) \leq 1998 < 1999$ *nên* $A + A^T$ *suy biến.*

Bài 127 Giả sử A là ma trận vuông cấp n mà trên đường chéo chính là các số 0 còn ngoài đường chéo là ± 1. Chứng minh rằng với n chẵn ma trận A là không suy biến còn với n lẻ thì ma trận A có thể là suy biến.

Hướng dẫn: Giả sử $A = (a_{ij})$ *ta thấy* $\det A$ *là số nguyên.*

Với n chẵn. Ta thay đổi dòng 1, bằng cách thay $a_{1j}, j \neq 1$ *bởi 1. Khi đó A đổi thành* A_1. $\det A_1 - \det A = \sum_{j\neq 1}(1 - a_{1j})A_{1j}$ *chẵn vì* A_{1j} *là số nguyên và* $(1 - a_{1j})$ *chẵn. Tiếp theo thay* $a_{2j},\ j \neq 2$ *bởi 1 ở hàng 2 ta được* A_2 *với* $\det A_2 - \det A_1$ *chẵn, . . . , tiếp tục ta thu được*

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Do $\det A_n = (-1)^{n-1}(n-1)$ *lẻ nên* $\det A$ *lẻ*

Với $n = 2k + 1$ *lẻ thì nếu mỗi hàng của A có k phần tử bằng* 1, *k phần tử là* -1 *thì* $\det A = 0$.

Bài 128 Chứng minh định thức sau khác không

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 1974 & 1975 \\ 2^2 & 3^2 & \dots & 1975^2 & 1976^2 \\ 3^3 & 4^3 & \dots & 1976^3 & 1976^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1975^{1975} & 1976^{1975} & \dots & 1976^{1975} & 1976^{1975} \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Chỉ ra D lẻ bằng các thay dần theo từng hàng: nếu a_{ij} *chẵn thay bằng* 0, *nếu* a_{ij} *lẻ thay bằng* 1.

Bài 129 Cho $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ có tính chất $a_{ii} > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|$ với $i = 1, 2, 3$. Chứng minh rằng $\det A \neq 0$.

Hướng dẫn: Phản chứng. Giả sử $\det A = 0$, *suy ra tồn tại* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *sao cho* $\sum_{j=1}^{3} \lambda_j a_{ij} = 0$. *Đặt* $|\lambda_k| = \max_{1\leq j\leq 3} |\lambda_j|$ *khi đó* $|\lambda_k|.|a_{kk}| = |\sum_{j\neq k} \lambda_j a_{kj}| \leq |\lambda_k| \sum_{j\neq k} |a_{jk}|$, *suy ra* $|\lambda_k| \leq \sum_{j\neq k} |a_{jk}|$, *mâu thuẫn.*

Bài 130 Cho A và B là các ma trận vuông cùng cỡ và thỏa mãn các hệ thức $AB = BA$, $A^{1977} = E$, $A^{1978} = E$. Chứng minh rằng ma trận $A + B + E$ khả nghịch.

Bài 131 Giả sử $A_1,\ A_2,\ \dots, A_{n+1}$ là các ma trận cỡ $n \times n$. Chứng minh rằng tìm được $n + 1$ số $x_1,\ x_2,\ \dots, x_{n+1}$ không đồng thời bằng không sao cho ma trận $x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_{n+1}A_{n+1}$ là suy biến.

Giải: Ký hiệu hàng đầu tiên của các ma trận $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ là $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$. Do $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ là các véc tơ n chiều nên là hệ phụ thuộc tuyến tính, vì vậy tồn tại $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sao cho $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_{n+1}u_{n+1} = 0$. Khi đó $x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_{n+1}A_{n+1}$ suy biến do có hàng 1 bằng không.

Bài 132 Trong một ma trận vuông thực cho trước tất cả các phần tử trừ phần tử trên đường chéo chính. Chứng minh rằng có thể đặt được các số 0 hoặc 1 vào các ô trống sao cho ma trận là không suy biến.

Giải: Ký hiệu định thức là D_n, và chứng minh quy nạp theo n. $n = 1$: Hiển nhiên. Giả sử đã thực hiện được cách điền số cho $D_{n-1} \neq 0$. Lấy $a_{nn} = x$ và khai triển D_n theo hàng n ta được $D_n(x) = xD_{n-1} + B$ với B không phụ thuộc x. Do $D_n(0) \neq D_n(1)$ nên một trong hai số $D_n(0), D_n(1)$ khác không (đpcm).

Bài 133 Chứng minh rằng với mỗi ma trận A tùy ý tồn tại ma trận J sao cho các phần tử đường chéo của nó bằng ± 1 và mọi phần tử còn lại bằng không để ma trận $JA + I$ không suy biến.

Hướng dẫn: Xem bài trước.

Bài 134 Có ma trận A như sau: mỗi cột của nó có đúng hai phần tử khác không, trong đó một phần tử trên đường chéo chính lớn hơn 1 và phần tử kia bằng 1. Như vậy ma trận A có suy biến hay không.

Hướng dẫn: Tương tự bài **129**.

Bài 135 Cho ma trận vuông A sao cho $A^{2004} = 0$. Chứng minh rằng ma trận $E + A^{1003} + A^{1004} + \cdots + A^{2003}$ là ma trận khả nghịch.

Hướng dẫn: Chỉ ra $E - A$ khả nghịch. Sử dụng $(E - A)(E + A^{1003} + \cdots + A^{2003}) = E - A + A^{2003}$ và $(E - A + A^{2003})(E - A - A^{2003}) = (E - A)^2$.

Bài 136 Trên một hình vuông kẻ ô kích thước 5×5, hai đấu thủ luân phiên nhau điền các số vào ô còn trống của hình vuông để được một ma trận cỡ 5×5. Biết rằng người thứ nhất luôn điền số 0 còn người thứ hai luôn luôn điền số 1. Chứng minh rằng với mọi cách điền số của người thứ hai người thứ nhất luôn có cách chơi để ma trận thu được có định thức bằng không.

Giải: Người thứ nhất thực hiện cách chơi như sau: Đầu tiên điền số 0 vào ô thứ nhất hàng 1. Chia 4 ô còn lại của hàng 1 thành 2 hình chữ nhật 1×2, Hàng $2 + 3$ chia thành 5 hình chữ nhật 1×2 với cạnh có độ dài 2 thẳng đứng. Hàng $4 + 5$ chia tương tự hàng $2 + 3$. Gọi các hình chữ nhật là đôminô. Sau đó, chơi theo cách: nếu người thứ hai điền vào một ô của đôminô thì người thứ nhất điền vào ô còn lại. Dễ thấy người thứ nhất thực hiện được cách chơi như vậy. Sau khi điền hết 25 ô, tổng các số trong một đôminô là 1, nên tổng của hàng 2 hàng 3 là $(1, 1, 1, 1, 1)$ và bằng tổng hàng 4 hàng 5, vậy định thức bằng không. (đpcm)

Bài 137 Trên một hình vuông kẻ ô kích thước 5×5, hai đấu thủ luân phiên nhau điền một trong các số $1, 2, 3, 4, 5$ vào ô còn trống của hình vuông để được một ma trận cỡ 5×5. Chứng minh rằng với mọi cách điền số của người thứ hai người thứ nhất luôn có cách chơi để ma trận thu được có định thức bằng không.

Hướng dẫn: Tương tự bài trên, người thứ nhất tìm cách điền sao cho tổng các số trong một đôminô bằng 6.

Bài 138 Trên một hình chữ nhật kẻ ô kích thước 2003×2004, hai đấu thủ luân phiên nhau điền các số vào ô còn trống của hình vuông để được một ma trận cỡ 2003×2004. Biết rằng người thứ nhất luôn điền một trong các số $2, 4, \ldots, 2004$ còn người thứ hai luôn luôn điền một trong các số $1, 3, \ldots, 2003$. Chứng minh rằng với mọi cách điền số của người thứ nhất người thứ chơi luôn có cách chơi để ma trận thu được có hạng không quá 1003.

Hướng dẫn: Tương tự bài trên.

Bài 139 Cho A là ma trận vuông cấp n, E là ma trận đơn vị cấp n và $(A + E)^m = 0$. Chứng minh rằng A khả nghịch.

Hướng dẫn: Chỉ ra $A(C_m^1E + C_m^2A + C_m^3A^2 + \cdots + C_m^mA^{m-1}) = -E$.

9. Hạng của ma trận

Bài 140 Trên đường chéo của ma trận cỡ $n \times n$ là các số 0, còn các phần tử khác là 1 hoặc 1980. Chứng minh rằng hạng của ma trận này là $n-1$ hoặc n.

Áp dụng bài **125**.

Bài 141 A là ma trận vuông cấp n có hạng r. Tính hạng của ma trận phụ hợp A^* tùy theo r.

Hướng dẫn: Nếu $r = n$ *thì* $r(A^*) = n$

Nếu $r \le n-2$ *thì* $A^* = 0$. *Nếu* $r = n-1$ *thì* $r(A^*) = 1$.

Bài 142 Giả sử A là ma trận cấp $m \times n$ có hạng bằng 1. Chứng minh rằng ta luôn tìm được ma trận B cấp $m \times 1$ và ma trận C cấp $1 \times n$ sao cho $A = BC$.

Giải: Giả sử U *là hàng cơ sở của* A, *khi đó nếu* u_i *là hàng thứ* i *của* A *thì tồn tại* λ_i *để* $u_i = \lambda_i U$. *Đặt* $B = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)^T$ *và* $C = U$.

Bài 143 Cho $\mathcal{M}_{n\times n}$ là không gian các ma trận vuông cấp n. Giả sử N là một không gian con của $\mathcal{M}_{n\times n}$ mà các phần tử của N đều là các ma trận suy biến. Số chiều lớn nhất của không gian N có thể có là bao nhiêu.

Bài 144 Cho A là ma trận vuông cấp n sao cho $A^2 = E$. Chứng minh rằng

$$\text{hạng}(A+E) + \text{hạng}(A-E) = n$$

Hướng dẫn: Coi A *là ma trận của ánh xạ* $\varphi : E \longrightarrow E$. *Hãy chỉ ra rằng* $Im(1-\varphi) = Ker(1+\varphi)$ *nên* $r(A-E) + r(A+E) = \dim Im(1-\varphi) + \dim Im(1+\varphi) = \dim Ker(1+\varphi) + \dim Im(1+\varphi)$.

Bài 145 Ký hiệu r_A là hạng của ma trận A. Chứng minh rằng với A, B là các ma trận vuông cấp n thì

$$r_A + r_B - n \le r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$$

Hướng dẫn: Coi A, B *là ma trận của các ánh xạ* $\varphi, \psi : E \longrightarrow E$. *Hãy chỉ ra* $\dim Ker(\varphi\psi) \le \dim Ker\psi + \dim Ker\varphi$ *nên* $r(AB) = n - \dim Ker(\varphi\psi) \ge n - \dim Ker\varphi - \dim Ker\psi = r(A) + r(B) - n$. *Hãy chỉ ra* $\dim Im(\varphi\psi) \le \dim Im\varphi$, $\dim Im(\varphi\psi) \le \dim Im\psi$ *nên* $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$.

Bài 146 Cho P, Q, R là các ma trận vuông cấp n chứng minh rằng

$$\text{hạng}(PQ) + \text{ hạng}(QR) \le \text{ hạng}Q + \text{ hạng}(PQR)$$

Hướng dẫn: Coi P, Q, R *là ma trận của ba ánh xạ* $f, g, h : E \longrightarrow E$. *Sử dụng* $\dim Im(fgh) = \dim Im(gh) - \dim[Im(gh) \cap Kerf]$ *và* $\dim Img = \dim Im(fg) + \dim(Kerf \cap Img)$ *cùng với* $[Im(gh) \cap Kerf] \subset (Img \cap Kerf$.

Bài 147 a) Đẳng thức $r(AB) = r(BA)$ là đúng hay sai? Giải thích.

b) Chứng minh rằng nếu A khả nghịch thì $r(AB) = r(B)$.

Trả lời: Sai. Chẳng hạn tồn tại $AB = 0$ *và* $BA \neq 0$

b) Chỉ ra $r(AB) \le r(B)$, *áp dụng cũng có* $r(A^{-1}AB) \le r(AB)$.

Bài 148 a) Cho ma trận A vuông có cấp 2004 và $r(A) = 1002$. Chứng minh rằng có thể thay đổi 1002 phần tử trong ma trận A để A trở thành ma trận không suy biến.

b) Chứng minh rằng nếu thay đổi m phần tử trong A với $m < 1002$ thì ma trận thu được là ma trận suy biến.

Hướng dẫn: Ký hiệu các cột của A là c_i. Lấy 1002 cột cơ sở của A, giả sử là $c_1, c_2, \ldots, c_{2004}$. Khi đó ta chọn được 1002 véc tơ $u_1, u_2, \ldots, u_{1002}$ trong cơ sở chính tắc của R^{2004} sao cho $\{c_1, c_2, \ldots c_{1002}, u_1, u_2, \ldots, u_{1002}\}$ là cở sở của R^{2004} và B là ma trận của hệ đó. Gọi A_1 là ma trận có các cột $c_1, c_2, \ldots, c_{1002}, c_{1003} + u_1, c_{1003} + u_2, \ldots, c_{2004} + u_{1002}$. Ta có $\det A_1 = \det B \neq 0$ và A_1 thu được từ A bằng cách thay đổi 1002 phần tử.

10. Ma trận nghịch đảo, lũy thừa của ma trận, đẳng thức của ma trận, ma trận đồng dạng

Bài 149 Tính A^{100} với $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Hướng dẫn: Đặt $B = A - E$, $(A = E + B)$, ta có $B^3 = 0$, nên $A^{100} = E + C_{100}^1 B + C_{100}^2 B^2$.

Bài 150 Giả sử A là ma trận vuông và $A^k = 0$. Chứng minh rằng

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

Hướng dẫn: Nhân $E - A$ với vế phải.

Bài 151 Cho ma trận vuông cấp $k + l$ dạng $A = \begin{pmatrix} E_k & U \\ O & E_l \end{pmatrix}$, trong đó E_k, E_l tương ứng là các ma trận đơn vị cấp k, l. Tìm A^{-1}.

Giải: Do $A^{-1}A = E$, và A^{-1} nhân cột đơn vị thứ j, $j \leq k$ cho ta cột thứ j của A^{-1} nên k cột đầu của A^{-1} là cột đơn vị. Tương tự, $A.A^{-1} = E$ và hàng đơn vị thứ $i, i > k$ nhân với A^{-1} cho ta hàng thứ i của A^{-1} nên l hàng cuối của A^{-1} là hàng đơn vị. Vậy $A^{-1} = \begin{pmatrix} E_k & V \\ 0 & E_l \end{pmatrix}$. Suy ra:

$$AA^{-1} = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} E_k & U \\ 0 & E_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k & V \\ 0 & E_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & E_l \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} E_k & U + V \\ 0 & E_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & E_l \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow U + V = 0 \Leftrightarrow V = -U \qquad \text{Vậy } A^{-1} = \begin{pmatrix} E_k & -U \\ 0 & E_l \end{pmatrix}$$

Bài 152 Tìm ma trận nghịch đảo của

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \ldots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \ldots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \ldots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \ldots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \qquad \text{ở đây} \quad \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Hướng dẫn: Lập hệ với vế phải là $x_1, x_2, \ldots, x_n$ từ đó tính cột thứ k của ma trận nghịch đảo. Có thể quy hệ phương trình về bài toán nội suy của đa thức.

Đáp số:

$$A^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-3} & \ldots & \varepsilon^{-(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-4} & \varepsilon^{-6} & \ldots & \varepsilon^{-2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{-3} & \varepsilon^{-6} & \varepsilon^{-9} & \ldots & \varepsilon^{-3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{-(n-1)} & \varepsilon^{-2(n-1)} & \varepsilon^{-3(n-1)} & \ldots & \varepsilon^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Bài 153 Giả sử A và B là các ma trận vuông cấp n và ma trận A khả nghịch. Liệu có hay không có đẳng thức $AB - BA = A$.

Hướng dẫn: Phản chứng: nếu có đẳng thức thì $B - A^{-1}BA = E$, Do đa thức đặc trưng của B và $A^{-1}BA$ là như nhau nên $vetB = vet(A^{-1}BA)$. Suy ra đẳng thức không xảy ra.

Bài 154 Cho A là ma trận có dạng

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \alpha_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hãy tìm ít nhất một véc tơ x để hệ véc tơ $\{x,\ Ax,\ A^2x,\ \dots, A^{n-1}x\}$ độc lập tuyến tính. Chứng minh rằng, nếu ma trận A đồng dạng với ma trận đường chéo với các số $\beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\beta_n$ trên đường chéo thì các số $\beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\beta_n$ đôi một khác nhau.

Hướng dẫn: Chọn $x = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Tiếp theo nếu $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ là cơ sở gồm các véc tơ riêng: $Aa_i = \beta_i a_i$, và giả sử $x = x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n$, ta có $A^ix = x_1\beta_1^i a_1 + x_2\beta_2^i a_2 + \dots x_n\beta_n^i a_n$. Do $\lambda_1 x + \lambda_2 Ax + \dots + \lambda_n A^{n-1}x = 0$ thì $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Suy ra hệ với các phương trình $\lambda_1 x_i + \lambda_2\beta^i x_i + \dots + \lambda_n x_i \beta_i^{n-1} = 0,\ i = 1, 2, \dots, n$ có nghiệm duy nhất $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ nên ta có kết qủa.

Bài 155 Tìm tất cả các ma trận thực M cấp n có tất cả các phần tử không âm và tồn tại ma trận nghịch đảo M^{-1} cũng có tất cả các phần tử không âm.

Hướng dẫn: Các dòng cột của $A,\ A^{-1}$ có ít nhất một phần tử dương, vì nếu không thì $\det A = 0$ hay là $\det A^{-1} = 0$. Các dòng, cột của A, A^{-1} chỉ có đúng một phần tử dương. Nếu trái lại, chẳng hạn cột j của A có hai phần tử dương ở các hàng $i_1, i_2 : a_{i_1j} > 0, a_{i_2j} > 0$. Do hàng j của A^{-1} có ít nhất một phần tử dương, chẳng hạn $a_{jk}^{(-1)} > 0$ thì cột thứ k của tích $AA^{-1} = E$ có hai phần tử dương. Như vậy mỗi hàng cột của A chỉ có duy nhất một phần tử dương.

Đảo lại: Nếu mỗi hàng cột của A chỉ có duy nhất một phần tử dương thì bằng biến đổi sơ cấp ta chỉ ra được A^{-1} có các phần tử không âm.

Bài 156 Giả sử A là một ma trận vuông không suy biến, mỗi dòng chỉ có một số khác 0 và bằng $+1$ hoặc -1. Chứng minh rằng với một số tự nhiên k nào đó ta có $A^k = A^T$.

Hướng dẫn: Vì A không suy biến nên trên mỗt cột của A chỉ có duy nhất một phần tử khác 0, theo giả thiết ta có $AA^t = E$ hay A là ma trận trực giao. Gọi M là tập tất cả các ma trận trực giao mà mỗi dòng chỉ có một phần tử khác 0 (là ± 1). Ta thấy $A^n \in M,\ n = 1, 2, 3, \dots$. Vậy tồn tại m, p nguyên dương $p \geq 2$ sao cho $A^{m+p} = A^m$. Do A khả nghịch nên $A^p = E$ đặt $k = p - 1$ ta có $A^k = A^{-1} = A^T$

Bài 157 Tính $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}$.

Hướng dẫn: Đặt $B = A - 2E$, ta có $B^2 = -B$, sử dụng nhị thức Niutơn ta được $A^{100} = (2E + B)^{100} = 2^{100}E + (2^{100} - 1)B$.

Bài 158 Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x}(A^n - E)\right]$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}$, $\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải: $A = a\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ *với* $a = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{n^2}}$, $\varphi = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + n^2}} \Rightarrow A^n = a^n\begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$

Khi $n \longrightarrow \infty$ *thì* $a^n \longrightarrow 1$, $\sin n\varphi = \sin\left(n\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + n^2}}\right) = \sin\left(\dfrac{nx}{\sqrt{n^2 + x^2}} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\right) = \sin x + o(1)$, $\cos n\varphi = \cos x + o(1)$. *Bởi vậy*

$$\lim_{n\to\infty}(A^n - E) = \begin{pmatrix} \cos x - 1 & \sin x \\ -\sin x & \cos x - 1 \end{pmatrix}$$

Vậy $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}(A^n - E)\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Bài 159 Chứng minh rằng với bất kì số tự nhiên n, ta tìm được một ma trận A sao cho

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 1976 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 1975 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1974 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Hướng dẫn: Xét ma trận A có dạng

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{1975} \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{1974} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Chứng minh quy nạp theo k rằng ma trận $A^k = (a_{ij}^{(k)})$ có các phần tử $a_{ij}^{(k)} = 0$ với $i > j$, $a_{ii}^{(k)} = 1$, $a_{ij}^{(k)} = a^{(k)}(j-i)$ với $j > i$, sao cho $a^{(k)}(s) = ka_s + f_{s,k}(a_1, a_2, \dots, a_{s-1})$ ở đây $f_{s,k}$ là một biểu thức chứa $a_1, a_2, \dots, a_s$. Bởi vậy hệ 1975 phương trình $ka_s + f_{s,k}(a_1, a_2, \dots, a_{s-1}) = s + 1, \quad s = 1, 2, \dots, 1975$ luôn có nghiệm và ta xác định được A, sao cho A^k là ma trận đã cho.

Bài 160 Cho ma trận A không suy biến cỡ $n \times n$. Liệu đối với ma trận X bất kì cỡ $n \times n$ có thể tìm được hay không một ma trận Y cỡ $n \times n$ thỏa mãn hệ thức.

$$X = AYA^{-1} - A^{-1}YA$$

Hướng dẫn: Chưa chắc. Do $vet(U + V) = vetU + vetV$ và vết của hai ma trận đồng dạng bằng nhau nên VF có vết bằng 0. Đẳng thức không đúng nếu $vetX$ khác không .

Bài 161 Chứng minh rằng không tồn tại các ma trận A và B sao cho $AB - BA = E$.

Hướng dẫn: Không xảy ra do VT có vết bằng không và VF có vết bằng $n \neq 0$.

Bài 162 Chứng minh rằng nếu ma trận vuông A cấp n có các phần tử trên đường chéo chính bằng 0 thì nó có thể biểu diễn dưới dạng $A = BC - CB$ với B, C là các ma trận vuông cấp n.
Hướng dẫn: Chọn $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, trong đó với $i \neq j$, $b_{ij} = c_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{j-i}$, $b_{ii} = 0, c_{ii} = i$. Chú ý BC-CB=A là một hệ $2n^2$ ẩn và n^2 phương trình nên ta có thể thêm n^2 điều kiện thích hợp hoặc chọn giá trị cho ẩn tự do.

Bài 163 Giả sử X và B_0 là các ma trận thực cỡ $n \times n$. Theo quy nạp chúng ta định nghiã dãy ma trận $B_i = B_{i-1}X - XB_{i-1}$. Chứng minh rằng nếu $X = B_{n^2}$ thì $X = 0$.

Giải: Không gian các ma trận vuông cấp n có số chiều là n^2 nên hệ $B_0, B_1, \dots, B_{n^2}$ phụ thuộc tuyến tính: $\lambda_0 B_0 + \lambda_1 B_1 + \dots + \lambda_{n^2} B_{n^2} = 0$. Đặt λ_i là hệ số đầu tiên khác 0, từ đẳng thức chuyển vế ta thu được $B_i = \gamma_1 B_{i+1} + \dots + \gamma_{n^2-i} B_{n^2}$. Do $B_{i+1} = B_i X - XB_i = \gamma_1 B_{i+2} + \dots + \gamma_{n^2-i} B_{n+1}$, và tương tự $B_{i+h} = \gamma_1 B_{i+h+1} + \dots + \gamma_{n^2-i} B_{n^2+h}$. Nhưng $X = B_{n^2}$ nên $B_{n^2+1} = B_{n^2}X - XB_{n^2} = X^2 - X^2 = 0$, dẫn đến $B_{n^2+j} = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots$. Suy ra $B_{n^2} = \gamma_1 B_{n^2+1} + \dots + \gamma_{n^2-i} B_{2n^2-i} = 0$ hay $X = B_{n^2} = 0$.

Bài 164 Giả sử A và B là hai ma trận cỡ $n \times n$ và ma trận $C = AB - BA$ là ma trận giao hoán được với cả A và B. Chứng minh rằng một lũy thừa nào đó của C bằng 0.

Hướng dẫn: Không gian các ma trận vuông cấp n có số chiều là n^2 nên hệ $E, B, B^2 \dots, B^{n^2}$ phụ thuộc tuyến tính, do đó tồn tại các số $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$, $(s \leq n)$ sao cho $\alpha_0 E + \alpha_1 B + \dots + \alpha_{s-1} B^{s-1} + B^s = 0$ hay $P_s(B) = 0$.

Hãy chứng minh quy nạp rằng: $AB^k - B^kA = kB^{k-1}C$. Bởi vậy $AP_s(B) - P_s(B)A = CP'_s(B) = 0$. Tiếp tục: $ACP'_s(B) - CP'_s(B)A = C^2P''_s(B) = 0, \ldots$, sau cùng ta thu được $s!C^s = 0$ tức là $C^s = 0$.

Bài 165 Giả sử A là ma trận cỡ $n \times n$, chứng minh rằng tồn tại ma trận B cỡ $n \times n$ mà $ABA = A$.

Hướng dẫn: Coi A là ma trận của ánh xạ $\varphi : E \longrightarrow E$. Giả sử $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ là một cơ sở của $Ker\varphi$, khi đó ta có thể bổ xung để được $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là cơ sở của E. Suy ra $u_{k+1}, \ldots, u_n$ với $u_i = \varphi(v_i)$, $i > k$ là cơ sở của $Im\varphi$. Bổ xung để được $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là cơ sở của E. Xét ánh xạ tuyến tính $\psi : E \longrightarrow E$ xác định bởi $\psi(u_i) = v_i$. Gọi B là ma trận của ψ. Dễ thấy $\varphi\psi\varphi = \varphi$ nên $ABA = A$.

Bài 166 Giả sử A là ma trận cỡ $n \times n$ có hạng r. Tìm số nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình $AX = 0$ với X là ma trận cỡ $n \times n$.

Đáp số: $n(n-r)$.

Bài 167 Giả sử A, B là các ma trận vuông cấp n.

a) Chứng minh rằng AB và BA có cùng một tập hợp các giá trị riêng.

b) Liệu AB và BA có chung một đa thức đặc trưng hay không.

Hướng dẫn: a) Giả sử λ là giá trị riêng của AB và $(AB)x = \lambda x$. Đặt $y = Bx$ ta có $(BA)y = B(ABx) = B(\lambda x) = \lambda y$.

b) Chưa chắc, chẳng hạn lấy $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Chú ý nếu A hoặc B khả nghịch thì AB và BA đồng dạng.

Bài 168 Cho A, B là các ma trận vuông cấp n, E là ma trận đơn vị cấp n. Chứng minh rằng nếu $E - AB$ khả nghịch thì $E - BA$ khả nghịch.

Hướng dẫn: Sử dụng bài trước. Nếu $\det(E - BA) = 0$ thì $\lambda = 1$ là giá trị riêng của BA.

Bài 169 Giả sử A là ma trận phức có $A^n = E$. Chứng minh rằng A chéo hóa được .

Bài 170 Giả sử A, B là hai ma trận vuông thực cấp n sao cho $AB - BA$ là ma trận có hạng bằng 1. Chứng minh rằng tìm được các ma trận phức C sao cho các ma trận CAC^{-1} và CBC^{-1} có dạng tam giác.

Bài 171 Tìm điều kiện để ma trận có các phần tử là số nguyên cũng có ma trận nghịch đảo có các phần tử là số nguyên.

Giải: Nếu A và A^{-1} có các phần tử nguyên thì $\det A$ và $\det A^{-1}$ nguyên, mà $\det A.\det A^{-1} = 1$ nên $\det A$ là ước của 1, suy ra $|\det A| = 1$.

Đảo lại: nếu $|\det A| = 1$ thì dễ thấy $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^* = (\det A)A^*$ là ma trận có các phần tử nguyên.

Bài 172 Giả sử A và S là các ma trận cỡ $n \times n$ mà tất cả các phần tử của chúng là nguyên, và $\det S \neq 0$, $\det A = 1$. Ký hiệu $B = S^{-1}AS$. Chứng minh rằng với một số tự nhiên m nào đó tất cả các phần tử của B^m là các số nguyên.

Hướng dẫn: Nếu $|\det S| = 1$, thì S^{-1} có các phần tử nguyên nên chỉ cần chọn $m = 1$.

Nếu $|\det S| = p > 1$. Với ma trận $X = (x_{ij})$ có phần tử nguyên tùy ý ta đặt $X_p = (x_{ij}^{(p)})$ với $x_{ij}^{(p)}$ là số dư khi chia x_{ij} cho p. Tập hợp các ma trận dạng X_p bao gồm p^{n^2} ma trận phân biệt nên tồn tại m, m_1 để $A_p^{m_1} = A_p^{m_1+m}$ như vậy $A^{m_1}(A^m - E)$ có các phần tử chia hết cho p. Do $\det A = 1$ nên A^{-1} có các phần tử nguyên, bởi vậy $A^m - E = A^{-m_1}[A^{m_1}(A^m - E)]$ có các phần tử chia hết cho p. Do $S^{-1} = \dfrac{1}{p}S^*$ và $B^m - E = S^{-1}(A^m - E)S = S^*\left[\dfrac{1}{p}(A^m - E)\right]S$ nên B^m có các phần tử nguyên.

Bài 173 Chứng minh rằng ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thỏa mãn phương trình $X^2 - (a+d)X + (ad - bc)E = 0$.

Hướng dẫn: Chỉ cần thử trực tiếp.

Bài 174 Giả sử A là ma trận vuông cấp 2 và $k > 2$ là số tự nhiên. Chứng minh rằng nếu $A^k = 0$ thì $A^2 = 0$.

Hướng dẫn: Áp dụng bài trước và $\det A = 0$, *ta có* $A^k = (a+d)^{k-1}A,\ A^2 = (a+d)A$, *nên thu được kết luận.*

Bài 175 Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, với a, b, c là các số thực. Hãy tìm tất cả các giá trị của a, b, c sao cho tồn tại $n \in \mathbf{N}$ để $A^n = E$.

Hướng dẫn: Chỉ ra $A = \begin{pmatrix} a^n & u \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$ *nên* $a = \pm 1,\ c = \pm 1$

Nếu $(a, c) = \pm 1$ *thì* $A^n = (\pm 1)^n \begin{pmatrix} 1 & \pm b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = (\pm 1)^n \begin{pmatrix} 1 & \pm nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *nên b=0 và* $A = \pm E$

Nếu $(a, c) = \pm(1, -1)$ *thì* $A^2 = E,\ \forall b$.

Bài 176 Giả sử $A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = (a_{ij}(n))$. Chứng minh rằng tồn tại giới hạn của hệ thức $\dfrac{a_{12}(n)}{a_{22}(n)}$ và tính giới hạn này khi $n \to \infty$.

Bài 177 Giả sử

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 - x & 5 - 3x^2 & 3x^3 - 1 \\ 2x^2 - 1 & 3x^5 - 1 & 7x^8 - 1 \end{vmatrix}$$

Chứng minh rằng tồn tại một số c, $(0 < c < 1)$, sao cho $f'(c) = 0$.

Hướng dẫn: Do $f(0) = f(1) = 0$ *(định thức có hai hàng tỉ lệ), áp dụng định lý Rôn.*

Bài 178 Tìm giới hạn

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Hướng dẫn: Tách $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B + C$

Ta có $BC = CB$ *và* $C^3 = 0$. *Như vậy* $A^n = B^n + C_n^1 B^{n-1} C + C_n^2 B^{n-2} C^2$ *ta thu được kết qủa.*

Bài 179 Giả sử α, β, γ là nghiệm của phương trình $x^3 + px + q = 0$. Tính định thức

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn: Giá trị định thức là: $(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) = 0$.

Bài 180 Giả sử ma trận A cấp n có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

Tìm tổng các phần tử của dòng đầu ma trận A^m với $m \leq n$.

Hướng dẫn: Tương tự bài **175**.

Bài 181 Chứng minh rằng nếu A, B là hai ma trận đối xứng thỏa mãn

$$\det(I - \lambda A)\det(I - \mu B) = \det(I - \lambda A - \mu B), \quad \forall\ \lambda, \mu$$

thì $AB = 0$.

Hướng dẫn: Với $\mu \neq 0$ đủ lớn thì tồn tại $(I-\mu B)^{-1}$. Như vậy từ giả thiết ta có $\det(I-\lambda A) = \det(I-\lambda A-\mu B)(I-\mu B)^{-1} = \det[I-\lambda A-\lambda\mu AB(I-\mu B)^{-1}]$. Suy ra A và $A-\mu AB(I-\mu B)^{-1}$ đồng dạng (do đối xứng nên cùng chéo hóa được và có cùng các giá trịriêng). Lấy M để $A = M^{-1}[A-\mu AB(I-\mu B)^{-1}]M = A-M^{-1}[\mu AB(I-\mu B)^{-1}]M$ suy ra $M^{-1}[\mu AB(I-\mu B)^{-1}]M = 0 \Rightarrow AB = 0$.

Bài 182 Cho M_n là tập hợp tất cả các ma trận vuông thực cấp n. Với ma trận A vuông cấp n ta gọi $vetA$ là $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Chứng minh rằng nếu $vet(AX) = 0, \quad \forall X \in M_n$ thì $A = 0$.

Hướng dẫn: Giả sử $A = (a_{ij})$. Gọi E_{ij} là ma trận có phần tử thuộc cột i hàng j có giá trị là 1, các phần tử khác bằng không. Khi đó $vet(AE_{ij}) = a_{ij}$, suy ra kết quả.

Bài 183 Ký hiệu I là tập hợp tất cả các ma trận vuông cỡ $n \times n,\ n \geq 2$ sao cho mỗi ma trận trong I chỉ có một phần tử là 1 các phần tử còn lại là 0. Biến đổi tập I như sau: lấy ra ngẫu nhiên hai ma trận A, B thuộc I và thay chúng bằng ma trận $3A - 2B$ hoặc $3B - 2A$ và tiếp tục như vậy cho đến khi I chỉ còn một ma trận X. Chứng minh rằng

a) $X \neq 0$ b) $X \neq E$.

Hướng dẫn: Chỉ ra rằng tổng các phần tử của các ma trận thuộc I luôn luôn bằng 1.

Bài 183 Ký hiệu I là tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp 2004 sao cho mỗi ma trận trong I có các hàng là hoán vị nào đó của hàng $(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)$. Biến đổi tập I như sau: lấy ra ngẫu nhiên hai ma trận A, B thuộc I và thay chúng bằng ma trận $3A - B$ hoặc $2B - A$ và tiếp tục như vậy cho đến khi I chỉ còn một ma trận X. Tính $\det X$

Hướng dẫn: Chỉ ra rằng tổng các phần tử của mỗi hàng trong các ma trận thuộc I luôn luôn bằng 0. $\det X = 0$.

Bài 184 Trong không gian $\mathcal{M}_{2\times 2}$ cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tính hạng của hệ véc tơ $\{A, A^2, A^3, \dots, A^{2004}\}$. *Hướng dẫn: Chỉ ra $A^2 - 5A + 6E = 0$*

Đáp số: $r = 2$.

Bài 185 Trong không gian $\mathcal{M}_{2\times 2}$ cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Hãy biểu diễn A^{2004} qua $A,\ E$.

Hướng dẫn: Xem bài trước.

Bài 186 Trong không gian các hàm số liên tục cho $I = \{\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x, \dots\}$. Chứng minh rằng khi đó mọi hệ con gồm hữu hạn phần tử của I là hệ độc lập tuyến tính.

Hướng dẫn: Xét $I_n = \{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$ là tập con của I. Chứng minh I_n độc lập tuyến tính bằng quy nạp và sử dụng đạo hàm hai vế đồng nhất thức:

$$\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \sin 2x + \cdots + \lambda_n \sin nx = 0$$

Do mọi tập con hữu hạn của I đều thuộc một tập I_n nào đó nên ta có kết luận.

Bài 187 Trong không gian các hàm số liên tục cho $I = \{\cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x, \ldots\}$. Chứng minh rằng khi đó mọi hệ con gồm hữu hạn phần tử của I là hệ độc lập tuyến tính.

Xem bài trước

Bài 188 Trong không gian tuyến tính $E, \dim E > 10$ cho hệ véc tơ I có 10 phần tử. Chứng minh rằng nếu với mọi véc tơ u thuộc I đều có hai véc tơ khác là v, w thuộc I để $u = \lambda u + \mu w$ thì hạng của I không quá 6. Hãy lấy ví dụ mà I có hạng là 6.

Bài 189 Trong không gian véc tơ $E,\ \dim E > 20$ cho hệ véc tơ I gồm 20 phần tử có hai tính chất:

1) Mọi hệ con gồm ba véc tơ của I đều độc lập tuyến tính

2) Mọi bộ phận gồm ba véc tơ của I đều có thể bổ xung thêm hai véc tơ trong I để được hệ phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh rằng $r(I) \leq 7$.

Bài 190 Tìm điều kiện của n để hệ sau độc lập tuyến tính

1) $1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x, \ldots,\ \sin^n x,\ \cos^n x$

2) $\sin x,\ \cos x,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x, \ldots,\ \sin^n x,\ \cos^n x$

Đáp số: 1) $n = 1$, 2) $n \leq 3$.

Bài 191 Trong không gian $\mathbb{R}^n$ cho tập I bao gồm tất cả các véc tơ $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sao cho x_i có giá trị là 0 hoặc 1. Chứng minh rằng mọi hệ con gồm $2^{n-1} + 1$ véc tơ của I có hạng là n.

Hướng dẫn: Gọi e_i là véc tơ thứ i trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Chia I thành 2^{n-1} cặp phần tử có dạng $\{v, v + e_i\}$. Khi đó nếu M là tập con gồm $2^{n-1} + 1$ phần tử của I, thì phải có ít nhất một cặp trong số 2^{n-1} cặp trên thuộc M, nên $e_i \in L(M)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Suy ra $L(M) = \mathbb{R}^n$ hay $r(M) = n$.

Bài 192 Có bao nhiêu ma trận trực giao cấp n mà các phần tử của nó là số nguyên.

Hướng dẫn: Gọi A là một ma trận trực giao có các phần tử nguyên. Hàng i của A là hàng đơn vị nên có ít nhất một phần tử khác không và phần tử đó duy nhất, đặt là $a_{i\sigma(i)}$. Chỉ ra điều kiện cần và đủ để A trực giao là σ là phép thế cấp n và $|a_{i\sigma(i)}| = 1$. Có 2^n ma trận trực giao ứng với phép thế σ nên có tất cả $2^n n!$ ma trận.

Bài 193 Trong không gian $\mathbb{R}^n$ cho hệ véc tơ $I = \{u_1, u_2, \ldots, u_{2004}\}$. Biết rằng với $i \neq j$ tùy ý luôn tìm được k để $u_k = 3u_i - 2u_j$. Chứng minh rằng

$$u_1 = u_2 = \cdots = u_{2004}$$

Hướng dẫn: Đặt $M = \max \|u_i\|$, $m = \min \|u_i\|$. Nếu $M > m$ thì với hai phần tử u_i, u_j mà $M = \|u_i\|, m = \|u_j\|$ ta có $\|u_k\| = \|3u_i - 2u_j| > M$. Mâu thuẫn chứng tỏ $m = M$ hay là $\|u_i\| = \|u_j\|$, $\forall i \neq j$. Tiếp theo lấy $i \neq j$ tùy ý, do $\|u_i\| = \|u_j\| = \|3u_i - 2u_j\|$ nên $u_i = u_j$.

Bài 194 Chứng minh rằng trong năm véc tơ bất kỳ của không gian Euclide bao giờ cũng chọn được hai véc tơ có chiều dài của tổng không vượt quá chiều dài của tổng ba véc tơ còn lại.

Hướng dẫn: Gọi các véc tơ được cho là a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Đặt u là tổng của chúng và $u_1 = a_1 + a_2 + a_3$, $u_2 = a_2 + a_3 + a_4$, $\ldots, u_5 = a_5 + a_1 + a_2$. Ta có $[u_1^2 - (u - u_1)^2] + \cdots + [u_5^2 - (u - u_5)^2] = u^2 \geq 0$. Vậy một trong các số hạng của tổng không âm, ta có kết qủa.

Bài 195 Chiều dài của tổng n véc tơ đơn vị không nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng có thể sắp các véc tơ theo trình tự $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$ để thỏa mãn đẳng thức:

$$\|v_1 + v_2 + \cdots + v_k\| \geq 1,\ \ k = 1, 2, \ldots, n$$

Hướng dẫn: Quy nạp theo n. Gọi các véc tơ đó là $u_1, u_2, \ldots, u_n$ và tổng của chúng là u. Với $n > 1$ tổng $[(u-u_1)^2 - u_1^2] + [(u-u_2)^2 - u_2^2] + \cdots + [(u-u_n)^2 - u_n^2] = (n-2)u^2 \geq 0$ nên trong tổng có ít nhất một số hạng không âm. Giả sử $(u-u_i)^2 - u_i^2 \geq 0$, chọn $v_n = u_i$ thì $\|u - v_n\| \geq \|v_n\| = 1$.

Bài 196 Tổng chiều dài của một số véc tơ trên mặt phẳng bằng π. Chứng minh rằng có thể chọn một số trong các véc tơ này sao cho tổng của chúng có chiều dài không nhỏ hơn 1.

Bài 197 Giả sử $n \geq 3$ và n véc tơ đơn vị $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ trong không gian Euclide có tính chất sau: trong bất kỳ 3 véc tơ nào của hệ bao giờ cũng tìm ra được một cặp trực giao. Chứng minh rằng

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\| \leq 2n^{\frac{3}{4}}$$

Bài 198 Trong 2004 véc tơ cho trước có các véc tơ không cộng tuyến. Biết rằng tổng của 2003 véc tơ bất kỳ cộng tuyến với véc tơ còn lại. Chứng minh rằng tổng 2004 véc tơ này bằng θ.

Hướng dẫn: Gọi u là tổng của chúng. Theo giả thiết u cùng phương với mọi véc tơ thuộc hệ. Suy ra $u = 0$.

Bài 199 Trong không gian ba chiều cho trước 10 véc tơ $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_{10}$ mà $\|a_i\| \leq 1,\ \forall i = 1, 2, \ldots, 10$ và $\|a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}\| \geq 7$. Hai đấu thủ lần lượt lấy đi từng véc tơ cho đến lúc còn lại hai véc tơ . Chứng minh rằng người đầu tiên có thể chơi để chiều dài của tổng hai véc tơ còn lại không nhỏ hơn 1.

Hướng dẫn: Đặt $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$, $n = \dfrac{s}{\|s\|}$, $\alpha_i =< a_i, n >$. Suy ra $\alpha_i \leq 1\ \forall i = 1, 2, \ldots, 10$ và $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{10} =< s, n >= \|s\| \geq 7$. Không mất tính tổng quát, giả sử $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_{10}$. Ta thấy $\alpha_5 + \alpha_6 \geq 1$ vì nếu trái lại do $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha_3 + \alpha_4 \leq \alpha_5 + \alpha_6 < 1$ nên

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) + (\alpha_5 + \alpha_6) + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + \alpha_{10} < 3 + 4 = 7$$

điều này trái với giả thiết.

Như vậy người thứ nhất chỉ cần tìm cách loại đi a_1, a_2, a_3, a_4 và luôn thực hiện được yêu cầu này. Gọi $a_i, a_j,\ i, j > 4$ là hai véc tơ còn lại. Khi đó $\|a_i + a_j\| \geq \alpha_i + \alpha_j \geq \alpha_5 + \alpha_6 \geq 1$.

Bài 200 Chứng minh rằng có thể sắp n véc tơ đơn vị trong không gian ba chiều theo thứ tự $v_1,\ v_2, \ldots,\ v_n$ để thỏa mãn bất đẳng thức

$$\|v_1 - v_2\| + \|v_2 - v_3\| + \cdots + \|v_{n-1} - v_n\| \leq 8\sqrt{n}$$

Bài 201 Giả sử A là ma trận đối xứng cỡ $n \times n$ với các phần tử dương, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng lớn nhất. Chứng minh rằng $x_1, x_2, \ldots, x_n$ khác 0 và cùng dấu.

Bài 202 Chứng minh rằng định thức của ma trận thực phản đối xứng không là số âm.

Hướng dẫn: Hãy chỉ ra rằng các giá trị riêng của ma trận chỉ có thể là 0 hoặc $\pm i\beta$.

Bài 203 Chứng minh rằng nếu S là ma trận phản đối xứng thì $I + S$ là ma trận không suy biến.

Hướng dẫn: Giống bài trước.

Bài 204 Giả sử $A_i,\ i = 1, 2, \ldots, N$ là các ma trận đối xứng cấp n mà $A_iA_j = 0$ với $i \neq j$. Chứng minh rằng $r(A_1) + r(A_2) + \cdots + r(A_N) \leq n$.

Hướng dẫn: Đặt $r(A_i) = r_i$, $r_0 = r(A_1 + A_2 + \cdots + A_N)$. Giả sử $\lambda = 0$ là nghiệm bội k_i của đa thức đặc trưng $P_{A_i}(\lambda)$, ta có $k_i = n - r_i$ (do A_i chéo hóa được). Ta có:

$$P_{A_1}(\lambda)P_{A_2}(\lambda)\ldots P_{A_N}(\lambda) = \det[(A_1 - \lambda I)(A_2 - \lambda I)\ldots(A_N - \lambda I)]$$
$$= \det\{(-1)^{N-1}[\lambda^{N-1}(A_1 + A_2 + \cdots + A_N) - \lambda^N I]\} = (-1)^{n(N-1)}\lambda^{n(N-1)}\det(A_1 + A_2 + \cdots + A_N - \lambda I)$$

Đối chiếu số bội của nghiệm $\lambda = 0$ ở hai vế ta có: $(n - r_1) + (n - r_2) + \cdots + (n - r_N) = n(N-1) + n - r_0$ suy ra $r_1 + r_2 + \cdots + r_N = r_0 \leq n$.

Bài 205 Cho E là ma trận đơn vị A, B, C là các ma trận vuông cùng cấp với E. Cho biết trong các đẳng thức $BAC = E$, $ACB = E$, $CAB = E$, $BCA = E$, $CBA = E$ đẳng thức nào xảy ra hay không xảy ra cùng đẳng thức $ABC = E$.

Đáp số: $CAB = E$, $BCA = E$.

Bài 206 Cho ma trận vuông $A = (p_{ij})$ cấp $p + q$ sao cho $p_{ij} = 0$ với $1 \leq i, j \leq p$ và với $p + 1 \leq i, j \leq p + q$. Chứng minh rằng nếu λ là giá trị riêng của nó thì $-\lambda$ cũng là giá trị riêng của nó.

Hướng dẫn: Chỉ ra $P_A(-\lambda) = (-1)^{p+q}P_A(\lambda)$ bằng cách đổi dấu p hàng đầu và q cột cuối. Vậy $P_A(\lambda) = 0$ thì $P_A(-\lambda) = 0$.

Bài 206 Cho A là ma trận đối xứng thực xác định dương. Chứng minh rằng $vetA.vetA^{-1} \geq n^2$.

13. Hệ phương trình tuyến tính

Bài 207 Hai sinh viên lần lượt thay các dấu $*$ trong hệ phương trình sau bằng các số:

$$\begin{cases} x + *y + *z = * \\ x + *y + *z = * \\ x + *y + *z = * \end{cases}$$

Chứng minh rằng người điền đầu tiên luôn có cách điền số sao cho hệ thu được cuối cùng là hệ không tương thích.

Lời giải: Kí hiệu 9 số cần điền là a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{13}, a_{23}, a_{33}, b_1, b_2, b_3. Người chơi thứ nhất chơi như sau: Nước đi đầu tiên điền giá trị b_1 và 8 chỗ trống còn lại thì chia thành bốn cặp (a_{12}, a_{13}), $(a_{22}, a_{32}), (a_{23}, a_{33}), (b_2, b_3)$ và sau đó nếu người thứ hai chọn giá trị cho một hệ số trong một cặp thì người thứ nhất chọn luôn giá trị cho hệ số còn lại và ta thấy người thứ nhất thực hiện được cách chơi như vậy. Chỉ cần người thứ nhất điền để $a_{22} = a_{32}$, $a_{23} = a_{33}$, $b_2 \neq b_3$ thì hệ thu được là hệ không tương thích.

Bài 207 Với giá trị nào của các tham số hệ phương trình

$$\begin{cases} x = by + cz + du + ev \\ y = cz + du + ev + ax \\ z = du + ev + ax + by \\ u = ev + ax + by + cz \\ v = ax + by + cz + du \end{cases}$$

có nghiệm không tầm thường

Hướng dẫn: Xét định thức của ma trận hệ số. Nếu có ≥ 2 trong 5 số a, b, c, d, e bằng -1 thì định thức có hai cột giống nhau nên bằng 0. Nếu có một số chẳng hạn $a = -1$ và $b, c, d, e \neq -1$ thì định thức là:$-(b+1)(c+1)(d+1)(e+1) \neq 0$ (loại). Nếu $a, b, c, d, e \neq -1$ thì định thức là

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)\Big[4 - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} - \frac{1}{c+1} - \frac{1}{d+1} - \frac{1}{e+1}\Big]$$

từ đó ta suy ra điều kiện .

Bài 208 Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ 2x_{2002} - 3x_{2003} + x_{2004} = 2002 \end{cases}$

Hướng dẫn: Hệ thuần nhất tương ứng có hai nghiệm cơ bản có dạng: $(1, a, a^2, \ldots, a^{2003})$ *với* $a = 1,\ a = 2$. *Nghiệm riêng của hệ không thuần nhất là:* $(x_1, x_2, \ldots, x_{2004})$ *với* $x_k = -\dfrac{1}{2}(k^2 - 5k)$.

Bài 209 Giải hệ phương trình $\begin{cases} 0.x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{2003,1}x_{2003} = 0 \\ a_{21}x_1 + 0.x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2,2003}x_{2003} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{2003,1}x_1 + a_{2003,2}x_2 + a_{2003,3}x_3 + \cdots + 0.x_{2003} = 0 \end{cases}$

trong đó với $i \neq j$ ta có $a_{ij} = 1$ hoặc $a_{ij} = 2004$.

Hướng dẫn: Hãy chỉ ra rằng định thức của ma trận hệ số không chia hết cho 2003 *(Xem bài* **127***)nên có giá trị khác* 0*. Hệ chỉ có nghiệm tầm thường duy nhất.*

Bài 210 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + \ x_2 + \ x_3 + \ x_4 \cdots + \ x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \cdots + 2x_n = 2^2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + \cdots + 3x_n = 3^2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \cdots + 4x_n = 4^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \cdots + nx_n = n^2 \end{cases}$

Hướng dẫn: Sử dụng phương pháp Gauss.

Bài 211 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 \cdots + \ \ x_n = 1 \\ x_1 + 2^2x_2 + 2^2x_3 + 2^2x_4 + \cdots + 2^2x_n = 2^4 \\ x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 3^2x_4 + \cdots + 3^2x_n = 3^4 \\ x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 4^2x_4 + \cdots + 4^2x_n = 4^4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + 2^2x_2 + 3^2x_3 + 4^2x_4 + \cdots + n^2x_n = n^4 \end{cases}$

Hướng dẫn: Sử dụng phương pháp Gauss.

14. Đa thức

Bài 212 Chứng minh rằng với các nghiệm x_1, x_2 của đa thức $x^2 + px + \dfrac{1}{2p^2}$ với $p \in \mathbf{R},\ p \neq 0$, ta có bất đẳng thức $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

Bài 213 Tìm tất cả các cặp số thực p, q sao cho đa thức $x^4 + px^2 + q$ có bốn nghiệm lập thành cấp số cộng.

Bài 214 Chứng minh rằng nếu các nghiệm của đa thức $x^2 + px + 1$ là α và β, còn các nghiệm của đa thức $x^2 + qx + 1$ là γ và d, thì ta có đẳng thức

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + d)(\beta + d) = q^2 - p^2$$

Bài 215 Chứng minh rằng với giá trị khác 0 tùy ý α, β các nghiệm x_1, x_2, x_3 của đa thức $\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta$ thỏa mãn đẳng thức

$$(x_1 + x_2 + x_3)\Big(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\Big) = -1$$

Hướng dẫn: Sử dụng định lý Viét.

Bài 216 Hãy tìm tất cả các giá trị của a, để các nghiệm x_1, x_2, x_3 của đa thức $x^3 - 6x^2 + ax + a$ thỏa mãn đẳng thức

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$$

Hướng dẫn: Sử dụng định lý Viét.

Bài 217 Giả sử một trong các nghiệm của đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, với $a, b \in \mathbf{Z}$ bằng tích hai của hai nghiệm kia. Chứng minh rằng số $2P(-1)$ chia hết cho số $P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0))$.
Hướng dẫn: Sử dụng định lý Viét và phân tích $P(x)$ thành nhân tử.

Bài 218 Giả sử a, b là hai trong bốn nghiệm của đa thức $x^4 + x^3 - 1$. Chứng minh rằng ab là nghiệm của đa thức $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$.

Bài 219 Cho các số nguyên a, b, c biết rằng $a > 0$, còn đa thức $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm khác nhau trên $(0, 1)$. Chứng minh rằng $a \geq 5$. Tìm ít nhất một cặp số b, c để $a = 5$.

Bài 220 Các số a, b, c là ba trong bốn nghiệm của đa thức $x^4 - ax^3 - bx + c$. Hãy tìm tất cả các bộ số a, b, c như vậy.

Bài 221 Chứng minh rằng các số phức a, b thỏa mãn điều kiện $a^2 = 2b \neq 0$ khi và chỉ khi các nghiệm của đa thức $x^2 + ax + b$ tạo trên mặt phẳng phức hai đỉnh của một tam giác vuông cân có đỉnh góc vuông tại gốc tọa độ.

Bài 222 Đa thức $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$ với các hệ số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ có n nghiệm thực. Chứng minh rằng $P(2) \geq 3^n$.

Hướng dẫn: Các nghiệm của $P(x)$ đều âm và sử dụng bất đẳng thức Côsi.

Bài 223 Đa thức $ax^n - ax^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_{n-2}x^2 - n^2bx + b$ có đúng n nghiệm dương. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm này bằng nhau.

Hướng dẫn: Sử dụng định lý Viét và bất đẳng thức Côsi.

Bài 224 Các đa thức $x^5 - x - 1$ và $x^2 + ax + b$, với $a, b \in \mathbf{Q}$, có thể có nghiệm số phức chung hay không?

Bài 225 Với đa thức $P(x)$ bậc n nào đó và với các $a < b$ nào đó thỏa mãn bất đẳng thức

$$P(a) < 0,\ -P'(a) \leq 0,\ P''(a) \leq 0, \ldots, (-1)^n P^{(n)}(a) \leq 0$$
$$P(b) > 0,\ P'(b) \geq 0,\ P''(b) \geq 0, \ldots,\ P^{(n)}(b) \geq 0.$$

Chứng minh rằng tất cả các nghiệm thực của đa thức $P(x)$ đều thuộc khoảng (a, b).

Hướng dẫn: Sử dụng khai triển Taylo tại $x = a,\ x = b$ để chỉ ra $P(x)$ không đổi dấu khi $x \notin (a, b)$.

Bài 226 Chứng minh rằng với giá trị tùy ý $n \in \mathbf{N}^+$, đa thức $P(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$ không thể có nhiều hơn một nghiệm thực.

Hướng dẫn: Xét dấu của P(x) bằng cách khảo sát hàm số.

Bài 227 Chứng minh rằng đa thức bậc n $P(x)$ với các hệ số thực, không có nghiệm thực, thì đa thức $Q(x) = P(x) + \alpha P'(x) + \cdots + \alpha^n P^{(n)}(x)$, với giá trị tùy ý $\alpha \in \mathbf{R}$ cũng không có nghiệm thực.

Bài 228 Chứng minh rằng với đa thức tùy ý $P(x)$ có bậc $n > 1$, có nghiệm khác nhau $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ta có đẳng thức

$$\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \cdots + \frac{1}{P'(x_n)} = 0$$

Bài 229 Giả sử $P(x)$ là đa thức với hệ số thực, có tất cả các nghiệm đều là số ảo. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm của đa thức $P'(x)$, trừ một nghiệm , cũng đều là số ảo.

Bài 230 Chứng minh rằng các đa thức khác không P và Q với các hệ số phức, có các nghiệm giống nhau (cùng số bội) khi và chỉ khi hàm số $f(z) = |P(z)| - |Q(z)|$ có dấu không đổi tại các điểm $z \in \mathbf{C}$, mà ở đó $f(z) \neq 0$.

Bài 231 Chứng minh rằng với mọi giá trị $n \in \mathbf{N}^+$, đa thức $(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

Bài 232 Chứng minh rằng với mọi giá trị $n \in \mathbf{N}$ và $\alpha \in \mathbf{R}$ thỏa mãn điều kiện $n \neq 1$ và $\sin\alpha \neq 0$, đa thức $P(x) = x^n \sin\alpha - x\sin\alpha + \sin(n-1)\alpha$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1$.

Bài 233 Tìm tất cả các đa thức $R(x)$ bậc bé hơn 4 mà với mọi đa thức đa thức ấy tồn tại đa thức $P(x)$ thỏa mãn đồng nhất thức

$$7\sin^{31} t + 8\sin^{13} t - 5\sin^5 t\cos^4 t - 10\sin^7 t + 5\sin^5 t - 1 \equiv P(\sin t)\sin^4 t - (1+\sin t)(\cos^2 t - 2) + R(sint), \quad t \in \mathbf{R}$$

Bài 234 Tìm tất cả các cặp số $m, n \in \mathbf{N}$ để đa thức $1 + x^n + x^{2n} + \cdots + x^{mn}$ chia hết cho đa thức $1 + x + x^2 + \cdots + x^m$.

Bài 235 Giả sử đa thức $P(x), Q(x), R(x)$ và $S(x)$ thỏa mãn đồng nhất thức

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)S(x)$$

Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $x - 1$.

Bài 236 Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(0) = 0$ và đồng nhất thức $P(x) \equiv \frac{1}{2}[P(x+1) + P(x-1)], \quad x \in \mathbf{R}$

Hướng dẫn: Chỉ ra rằng đa thức $Q(x) = P(x) - P(1)x \equiv 0$ vì có vô số nghiệm.

Bài 237 Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn đồng nhất thức: $xP(x-1) \equiv (x-2)P(x), \quad x \in \mathbf{R}$
Hướng dẫn: Chỉ ra rằng $P(x) = (x^2 - x)Q(x)$ và $Q(0) = Q(-1) = Q(-2) = \ldots = const.$

Bài 238 Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn đồng nhất thức

$$(x-1)P(x+1) - (x+2)P(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbf{R}$$

Hướng dẫn: Xem bài trên.

Bài 239 Tìm tất cả các đa thức khác không $P(x)$ thỏa mãn đồng nhất thức $P(x^2) = [P(x)]^2, \quad x \in \mathbf{R}$.

Hướng dẫn: Sử dụng $P(x) = a\prod_{k=1}^{n}(x - \alpha_k)$ và chỉ ra $a = 1,\ \alpha_k = 0$.

Bài 240 Tìm tất cả các đa thức khác không $P(x)$ thỏa mãn đồng nhất thức $P(x^2 - 2x) \equiv [P(x-2)]^2, \quad x \in \mathbf{R}$ *Hướng dẫn: Đặt $y = x - 1$ quy về bài trên.*

Bài 241 Tìm tất cả các đa thức khác không $P(x)$ với hệ số thực, thỏa mãn đồng nhất thức $P(x)P(2x^2) \equiv P(2x^3 + x), \quad x \in \mathbf{R}$

Hướng dẫn: Chỉ ra tất cả các nghiệm của $P(x)$ có mô đun bằng 1.

Đáp số: $P(x) = (x^2 + 1)^k$.

Bài 242 Chứng minh rằng với mọi đa thức $P(x) \neq x$ và số $n \in \mathbf{N}$ tùy ý, đa thức $Q_n(x) = P(P(\ldots P(x)\ldots)) - x$ (n lần) chia hết cho $Q_1(x) = P(x) - x$.

Hướng dẫn: Quy nạp.

Bài 243 Chứng minh rằng nếu các đa thức bậc ba $P(x), Q(x), R(x)$ với các hệ số thực thỏa mãn bất đẳng thức $P(x) \leq Q(x) \leq R(x)$ với mọi giá trị $x \in \mathbf{R}$ và tại ít nhất một điểm $x_0 \subset \mathbf{R}$ thỏa mãn đẳng thức $P(x_0) = R(x_0)$ thì với số $k \in [0, 1]$ nào đó ta có đồng nhất thức

$$Q(x) \equiv kP(x) + (1-k)R(x), \quad x \in \mathbf{R}$$

Khẳng định trên còn đúng với đa thức bậc 4?

Bài 244 Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Chứng minh rằng với số $n \in \mathbf{N}$ tùy ý không tồn tại nhiều hơn một đa thức $Q(x)$ bậc n, thỏa mãn đồng nhất thức.

$$Q(P(x)) = P(Q(x), \quad x \in \mathbf{R}$$

Bài 245 Chứng minh rằng đa thức $P(z)$ là hàm số chẵn của $z \in \mathbf{C}$ khi và chỉ khi tồn tại đa thức $Q(z)$ thỏa mãn đồng nhất thức $P(z) \equiv Q(z)Q(-z),\ z \in \mathbf{C}$

Hướng dẫn: Sử dụng phân tích $P(x) = a\prod_{1=1}^{k}(x-\alpha_i)^{m_i}$ *và quy nạp.*

Bài 246 Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x)$ với hệ số thực chỉ nhận giá trị không âm với mọi $x \in \mathbf{R}$, thì có thể biểu diễn được dưới dạng

$$P(x) = Q_1^2(x) + Q_2^2(x) + \cdots + Q_n^2(x)$$

với $Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x)$ là các đa thức với hệ số thực.

Hướng dẫn: Sử dụng phân tích $P(x) = a\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)\prod_{j=1}^{h}[(x-\alpha_j)^2+\beta_j^2]$ *và quy nạp.*

Bài 247 Giả sử đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn bất đẳng thức $P(x) > 0$ với mọi $x > 0$. Chứng minh rằng tồn tại các đa thức $Q(x)$ và $R(x)$ với các hệ số không âm thỏa mãn đồng nhất thức $P(x) \equiv \dfrac{Q(x)}{R(x)}$

Hướng dẫn: Sử dụng phân tích $P(x) = a\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)\prod_{j=1}^{h}[(x-\alpha_j)^2+\beta_j^2]$ *và biểu diễn các thừa số bậc 2 không âm theo yêu cầu của đầu bài .*

Bài 248 Giả sử $A(n)$ là các đa thức có dạng $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ với $0 \leq a_0 = a_n \leq a_1 = a_{n-1} \leq \ldots \leq a_{[\frac{n}{2}]} = a_{[\frac{n+1}{2}]}$. Chứng minh rằng nếu $P(x) \in A(n)$ và $Q(x) \in A(m)$ thì ta có $P(x)Q(x) \in A(m+n)$

Bài 249 Với giá trị nào của $n \in \mathbf{N}$ tồn tại các đa thức khác không P và Q của n biến số với các hệ số nguyên, thỏa mãn đồng nhất thức

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2), \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$$

Bài 250 Giả sử với các đa thức $P(x), Q(x)$ bậc lớn hơn không, ký hiệu, ký hiệu $P_c = \{z \in \mathbf{C} |\ P(z) = c\},\quad Q_c = \{z \in \mathbf{C} |\ Q(z) = c\}$. Chứng minh rằng nếu $P_0 = Q_0$ và $P_1 = Q_1$ thì $P(x) \equiv Q(x),\ x \in \mathbf{R}$

Bài 251 Chứng minh rằng nếu các đa thức $P(x,y),\ Q(x,y),\ R(x,y)$ bậc bé hơn $m \in \mathbf{N}$ thỏa mãn đồng nhất thức

$$x^{2m}P(x,y) + y^{2m}Q(x,y) \equiv (x+y)^{2m}R(x,y),\ x, y \in \mathbf{R}$$

thì $P(x,y) \equiv Q(x,y) \equiv R(x,y) \equiv 0$.

Bài 252 Với những ràng buộc nào của các số nguyên p và q:

a) Đa thức $P(x) = x^2 + px + q$ nhận các giá trị chẵn (lẻ) với mọi $x \in \mathbf{Z}$.

b) Đa thức $Q(x) = x^3 + px + q$ nhận giá trị chia hết cho 3 với mọi $x \in \mathbf{Z}$.

Bài 253 Chứng minh rằng đa thức $P(x) = \frac{1}{630}x^9 + \frac{1}{21}x^7 + \frac{13}{30}x^5 + \frac{82}{63}x^3 + \frac{32}{35}x$ nhận giá trị nguyên với mọi $x \in \mathbf{Z}$.

Bài 254 Tìm tất cả các giá trị $x \in \mathbf{Z}$ để đa thức $2x^2 - x - 36$ nhận giá trị là bình phương của các số nguyên tố.

Bài 255 Với các số cho trước $p, q \in \mathbf{R}$ hãy tìm tất cả các giá trị mà đa thức $P(x) = x^2 + px + q$ nhận được với $x \in [-1, 1]$.

Bài 256 Đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên nhận giá trị 2 với bốn giá trị khác nhau của $x \in \mathbf{Z}$. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbf{Z}$ đa thức này không thể nhận các giá trị $1, 3, 5, 7, 9$.

Bài 257 Hãy tìm một tập hợp M gồm 7 số tự nhiên liên tiếp sao cho tồn tại đa thức bậc năm $P(x)$ với các tính chất sau: a) Tất cả các hệ số $P(x)$ đều nguyên ;

b) Với 5 số $k \in M$, trừ số bé nhất và số lớn nhất ta có đẳng thức $P(k) = k$ c) $P(k) = 0$ với một số $k \in M$.

Bài 258 a) Chứng mih rằng không tồn tại đa thức $P(x)$ để với mọi $x \in \mathbf{R}$ có các bất đẳng thức:

1) $P'(x) > P''(x)$ và 2) $P(x) > P''(x)$.

b) Khẳng định a) còn đúng không nếu thay bất đẳng thức 1) bằng bất đẳng thức 1') $P(x) > P'(x)$?

Bài 259 Giả sử cho trước các đa thức $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ với các hệ số thực và các số $_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. Chứng minh rằng nếu hàm số $f(x) = P_0(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k |P_k(x)|$ là đơn trị, thì tập hợp tất cả các giá trị của nó là $\mathbf{R}$.

Bài 260 Giả sử $\{a_n\}$ là dãy số (Fibonaci), xác định bằng các đẳng thức $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in \mathbf{N})$. Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x)$ bậc 990 thỏa mãn điều kiện $P(k) = a_k$ với $k = 992, \ldots, 1982$ thì $P(1983) = a_{1983} - 1$.

Bài 261 Chứng minh rằng

a) Với mọi $n \in \mathbf{N}$ tồn tại đa thức $P_n(x)$ bậc n với các hệ số nguyên thỏa mãn đẳng thức $2\cos nt = P_n(\cos 2t), \quad t \in \mathbf{R}$.

b) Với mọi $\alpha \in \mathbf{Q}$ số $\cos \alpha\pi$ hoặc trùng với một trong các số $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$, hợc là số vô tỉ

Bài 262 Giả sử trên mặt phẳng tọa độ cho đường cong, là đồ thị của đa thức $P(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$ $(p, q, r, s \in \mathbf{R}$. Một mặt phẳng trên đường thẳng ấy được gọi là nằm ngang nếu nó song song với trục hoành và cắt đường cong tại bốn điểm A, B, C, D (tính từ trái sang phải). Ngoài ra nếu độ dài các đoạn thẳng AB, AC, AD có thể lấy làm độ dài các cạnh một tam giác nào đó thì đường thẳng như vậy còn được gọi là tam giác đạc.

Chứng minh rằng chỉ có thể xảy ra hai trường hợp: hoặc tất cả các đường thẳng nằm ngang là tam giác đạc hoặc tất cả các đường ấy không phải là tam giác đạc.

Bài 263 Giả sử $Q(x)$ là đa thức khác không. Chứng minh rằng với mỗi $n \in \mathbf{Z}^+$ đa thức $P(x) = (x-1)^n Q(x)$ có không ít hơn $n+1$ hệ số khác không.

Bài 264 Giả sử M là tập hợp tất cả các đa thức có dạng $P(x) = ax^3 = bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbf{R})$ thỏa mãn bất đẳng thức $|P(x)| \leq 1$ với $x \in [-1, 1]$. Chứng minh rằng có số k thỏa mãn bất đẳng thức $|a| \leq k$ với tất cả các đa thức $P(x) \in M$. Tìm giá trị bé nhất của k.

Bài 265 Giả sử P, Q là các số tự nhiên tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ với các hệ số nguyên, sao cho tất cả các giá trị trong khoảng $I \subset R$ có độ dài $\frac{1}{q}$ thỏa mãn bất đẳng thức $|P(x) - pq| \leq \frac{1}{q^2}$.

Bài 266 Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ có bậc ba với các hệ số thực thỏa mãn bốn điều kiện :

a) Cả hai đa thức nhận giá trị 0 hoặc 1 tại các điểm $x = 1, 2, 3, 4$

b) Nếu $P(1) = 0$ hoặc $P(2) = 1$ thì $Q(1) = Q(3) = 1$

c) Nếu $P(2) = 0$ hoặc $P(4) = 0$ thì $Q(2) = Q(4) = 0$

d) Nếu $P(3) = 1$ hoặc $P(4) = 1$ thì $Q(1) = 0$

Bài 267 Đa thức $P(x)$ bậc n thỏa mãn các đẳng thức $P(k) = \frac{k}{k+1}$ với $k = 0, 1, \ldots n$. Tìm $P(n+1)$.

Bài 268 Đa thức $P(x)$ bậc n thỏa mãn các đẳng thức $P(k) = \frac{1}{C_{n+1}^k}$ với $k = 0, 1, \ldots n$. Tìm $P(n+1)$.

Bài 269 Giả sử cho trước các số nguyên $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. chứng minh rằng giữa các giá trị của đa thức $x^n + a_0 x^{n-1} + \cdots + a_n$ tại các điểm $x_0, x_1, \ldots, x_n$ luôn tìm được một số mà mô đun của nó không bé hơn $\frac{n!}{2^n}$.

Bài 270 Đa thức $P(x)$ có bậc không lớn hơn $2n$. Biết rằng mỗi số nguyên $k \in [-n, n]$ đều thỏa mãn bất đẳng thức $|P(x)| \leq 1$. Chứng minh rằng với mọi số $x \in [-n, n]$ ta có bất đẳng thức $|P(x)| \leq 2^{2n}$.