Chương I
TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

Bài 1.1. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(f(x)) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ luôn luôn có nghiệm.

b) Hãy tìm một hàm thoả mãn điều kiện trên nhưng không đồng nhất bằng x trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn:

a) Giả sử phương trình $f(x) = x$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$, tức là $f(x) \neq x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vì hàm f liên tục nên ta suy ra f không đổi dấu trên $\mathbb{R}$. Không mất tổng quát, giả sử $f(x) > x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó: $f(f(x)) > f(x) > x$. Điều này mẫu thuẫn với giả thiết. Vậy phương trình $f(x) = x$ luôn có nghiệm.

b) Dễ thấy hàm $f(x) = 1 - x$ thoả mãn điều kiện $f(f(x)) = x$ và không đồng nhất bằng x.

Bài 1.2. Cho $f : [a, b] \to [a, b]$ là một hàm liên tục sao cho $f(a) = a,\ f(b) = b$ và $f(f(x)) = x$ với mọi $x \in [a, b]$. Chứng minh rằng $f(x) = x$ với mọi $x \in [a, b]$.

Hướng dẫn:

Từ giả thiết $f(f(x)) = x$ ta dễ dàng suy ra f là đơn ánh. Kết hợp với tính liên tục ta kết luận được f là một hàm đơn điệu. Hơn nữa, do $f(a) = a < b = f(b)$ nên f đơn điệu tăng trên $[a, b]$.

Nếu tồn tại $x_o \in [a, b]$ sao cho $f(x_o) < x_o$ hay $f(x_o) > x_o$ thì $f(f(x_o)) < f(x_o) < x_o$ hay $f(f(x_o)) > f(x_o) > x_o$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in [a, b]$.

Bài 1.3. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(f(f(x))) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng $f(x) = x$ trên $\mathbb{R}$. Hãy tìm bài toán tổng quát hơn.

b) Tìm một hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(f(f(x))) = x$ nhưng $f(x)$ không đồng nhất bằng x.

Hướng dẫn:

a) Từ giả thiết suy ra hàm f đơn điệu ngặt trên $\mathbb{R}$. Nếu f giảm ngặt trên $\mathbb{R}$ thì f^2 tăng ngặt trên $\mathbb{R}$. Do đó f^3 lại giảm ngặt trên $\mathbb{R}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $f(f(f(x))) = x$.

Bây giờ giả sử f tăng ngặt trên $\mathbb{R}$. Nếu tồn tại $x_o \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_o) > x_o$ thì ta suy ra $f(f(x_o)) > f(x_o) > x_o$, và $f(f(f(x_o))) > f(x_o) > x_o$. Điều này mâu thuẫn.

Tương tự ta cũng có được điều mâu thuẫn nếu $f(x_o) < x_o$. Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán tổng quát: "Cho f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f^{2n+1}(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(x) = x$ trên $\mathbb{R}$."

b) $$f(x) = \begin{cases} x \text{ nếu } x \notin \{1, 2, 3\} \\ 2 \text{ nếu } x = 1 \\ 3 \text{ nếu } x = 2 \\ 1 \text{ nếu } x = 3. \end{cases}$$

Bài 1.4. Cho f là một hàm liên tục và đơn ánh trên (a, b). Chứng minh rằng f là một hàm đơn điệu ngặt trên (a, b).

Hướng dẫn:

Giả sử f không phải là hàm đơn điệu ngặt trên (a, b), khi đó tồn tại x_1, x_2, x_3 thuộc (a, b) sao cho $x_1 < x_2 < x_3$ và

$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_3) < f(x_2) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} f(x_1) > f(x_2) \\ f(x_3) > f(x_2) \end{cases}$.

Giả sử $\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_3) < f(x_2) \end{cases}$. Đặt $m = \max\{f(x_1), f(x_3)\}, \quad M = f(x_2)$.

Chọn $k \in [m, M]$. Theo định lý giá trị trung gian, tồn tại c_1, c_2 thuộc (a, b) sao cho: $x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < x_3$ và $f(c_1) = f(c_2) = k$.

Điều này mâu thuẫn với tính đơn ánh của f.

Tương tự, nếu $\begin{cases} f(x_1) > f(x_2) \\ f(x_3) > f(x_2) \end{cases}$ ta cũng suy ra điều mâu thuẫn. Vậy f là một hàm đơn điệu ngặt trên (a, b).

Bài 1.5. Cho hàm số $f : [a, b] \to [a, b]$ thoả mãn điều kiện

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \text{ với mọi } x \in [a, b], x \neq y.$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ luôn luôn có duy nhất nghiệm trên $[a, b]$.

Hướng dẫn:

Đặt $\varphi(x) = f(x) - x$. Dễ thấy $\varphi(x)$ liên tục trên $[a, b]$.

Ta có: $\varphi(a) = f(a) - a \geq 0,\ \varphi(b) = f(b) - b \leq 0$ nên tồn tại $x_o \in [a, b]$ sao cho $\varphi(x_o) = f(x_o) - x_o = 0$, tức là $f(x_o) = x_o$.

Nếu tồn tại x_1, x_2 thuộc $[a, b], x_1 \neq x_2$ mà $f(x_1) = x_1,\ f(x_2) = x_2$ thì ta suy ra:
$|x_1 - x_2| = \big|f(x_1) - f(x_2)\big| < |x_1 - x_2|$, điều này là mâu thuẫn.

Vậy phương trình $f(x) = x$ luôn có duy nhất nghiệm trên $[a, b]$.

Bài 1.6. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn một trong hai điều kiện sau:

a) f là hàm đơn điệu giảm trên $\mathbb{R}$.

b) f là một hàm bị chặn trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ luôn luôn có nghiệm. Trong mỗi trường hợp, hãy xem điều kiện duy nhất nghiệm có được đảm bảo không ?

Hướng dẫn:

a) Đặt $\varphi(x) = f(x) - x$ thì φ liên tục trên $\mathbb{R}$. Với mọi $x > 0$ ta có

$$\varphi(x) = f(x) - x \leq f(0) - x.$$

Với mọi $x < 0$, ta có $\varphi(x) = f(x) - x \geq f(0) - x$.

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x \to +\infty} = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} = +\infty$.

Do đó, tồn tại $x_o \in \mathbb{R}$ để $\varphi(x_o) = 0$, tức là phương trình $f(x) = x$ có nghiệm.

b) Đặt $\varphi(x) = f(x) - x$ thì φ liên tục trên $\mathbb{R}$. Theo giả thiết, f bị chặn trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $-M \leq f(x) \leq M$.

Chọn $x_1 \geq M$, khi đó ta có

$$\varphi(x_1) = f(x_1) - x_1 \leq f(x_1) - M \leq 0.$$

Chọn $x_2 \leq -M$, khi đó ta có

$$\varphi(x_2) = f(x_2) - x_2 \geq f(x_2) + M \geq 0.$$

Vậy tồn tại $x_o \in \mathbb{R}$ sao cho $\varphi(x_o) = 0$, tức là phương trình $f(x) = x$ có nghiệm.

Bạn đọc tự kiểm tra điều kiện duy nhất nghiệm.

Bài 1.7. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm thì phương trình $f(x) = x$ cũng có nghiệm.

Hướng dẫn:

Giả sử phương trình $f(x) = x$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$. Do f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên ta suy ra $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < x$ hoặc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > x$.

Nếu với mọi $x \in \mathbb{R}, f(x) > x$ thì $f(f(x)) > f(x) > x$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm.

Tương tự, nếu với mọi $x \in \mathbb{R}, f(x) < x$ thì ta cũng có điều mâu thuẫn. Vậy phương trình $f(x) = x$ có nghiệm.

Bài 1.8. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn

$$|f(x)| < |x| \text{ với mọi } x \neq 0.$$

a) Chứng minh rằng $f(0) = 0$.

b) Chứng minh rằng nếu $0 < a < b$ thì tồn tại $K \in [0, 1)$ sao cho

$$|f(x) \leq K|x|, \forall x \in [a, b].$$

Hướng dẫn:

a) Ta có: $|f(0)| = \lim\limits_{x\to 0} |f(x)| \leq \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$. Vậy $f(0) = 0$.

b) Với mọi $x \in [a, b]$, đặt $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Ta thấy g liên tục trên $[a, b]$. Đặt $K = \sup\limits_{x\in[a,b]} |\dfrac{f(x)}{x}|$. Vì $|g|$ liên tục trên $[a, b]$ nên tồn tại $x_o \in [a, b]$ để

$$K = \sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|\frac{f(x_o)}{x_o}\right| < 1.$$

Từ đó dễ thấy rằng $|f(x) \leq K.|x|$ với mọi $x \in [a, b]$.

Bài 1.9. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn một trong ba điều kiện dưới đây:

a) $f(x) + f(2x) = 0,\ \forall \in \mathbb{R}$.

b) $f(x^2) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = f(\sin x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng f là hàm hằng.

Hướng dẫn:

a) Từ giả thiết suy ra $f(x) = -f(2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Bằng qui nạp ta dễ dàng chứng minh được $f(x) = (-1)^n f(\dfrac{x}{2^n})$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chú ý rằng từ giả thiết ta cũng có $f(0) = 0$. Vì vậy

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n f(\frac{x}{2^n}) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Ta có $\left|(-1)^n f(\dfrac{x}{2^n})\right| = \left|f(\dfrac{x}{2^n})\right|$. Vì f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \left|f(\dfrac{x}{2^n})\right| = |f(0)| = 0$. Do đó $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n f(\dfrac{x}{2^n}) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Ta có $f(-x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác, với mọi $x > 0$ ta có

$$f(x) = f(x^{\frac{1}{2}}) = f(x^{\frac{1}{4}}) = \cdots = f(x^{\frac{1}{2^n}}),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(1)$ (do f liên tục trên $\mathbb{R}$).

Vì $f(-x) = f(x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $f(x) = f(1)$ với mọi $x \neq 0$.

Hơn nữa, do tính liên tục của hàm f, ta cũng có

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} f(1) = f(1).$$

Tóm lại, $f(x) = f(1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

c) Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, đặt $x_1 = \sin x, x_2 = \sin x_1, \cdots, x_{n+1} = \sin x_n$. Khi đó, hãy chứng minh rằng $(x_n)_n$ là dãy đơn điệu và bị chặn. Gọi $a = \underset{n\to\infty}{\to} \lim x_n$; từ phương trình $a = \sin a$ ta suy ra $a = 0$.

Ta thấy $f(x) = f(x_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vì vậy

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(0).$$

Tư đó, ta kết luận được $f(x) = f(0)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, tức là f là hàm hằng.

Bài 1.10. Cho f là một hàm không âm, liên tục trên $[0, +\infty)$ và $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k < 1$.

Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in [0, +\infty)$ sao cho $f(x_o) = x_o$.

Hướng dẫn:

Đặt $\varphi(x) = f(x) - x$. Ta có $\varphi(0) = f(0) \geq 0$.

Vì $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k < 1$ nên tồn tại $c > 0$ sao cho với mọi $x \geq c$ thì $\dfrac{f(x)}{x} < 1$. Suy ra $f(c) < c$ hay $\varphi(c) = f(c) - c < 0$.

Vậy tồn tại $x_o \in [0, c] \subset [0, +\infty)$ sao cho $\varphi(x_o) = 0$, tức là $f(x_o) = x_o$.

Bài 1.11. Cho f là hàm liên tục trên $[0, n], f(0) = f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Chứng minh rằng tồn tại n cặp $(\alpha_i, \beta_i), \alpha_i, \beta_i \in [0, n], \beta_i - \alpha_i \in \mathbb{N}$ sao cho $f(\alpha_i) = f(\beta_i)$.

Lời giải:

Ta chứng minh bằng qui nạp. Rõ ràng khẳng định đúng với $n = 1$. Giả sử rằng nếu f là một hàm liên tục trên $[0, n]$ sao cho $f(0) = f(n), n \in \mathbb{N}$ thì tồn tại n cặp (α_i, β_i) thoả mãn $\beta_i - \alpha_i \in \mathbb{N},\ f(\alpha_i) = f(\beta_i)$.

Ta chứng minh khẳng định trên đúng với $n + 1$. Giả sử $f(0) = f(n + 1)$.

Xét hàm $\varphi(x) = f(x + 1) - f(x),\ x \in [0, n]$.

Ta có $\varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi(n) = 0$.

Do đó tồn tại $x_o \in [0, n]$ sao cho $\varphi(x_o) = 0$ hay $f(x_o + 1) = f(x_o)$.

Đặt

$$h(x) = \begin{cases} f(x),\ x \in [0, x_o] \\ f(x + 1),\ x \in (x_o, n]. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng h liên tục trên $[0, n]$ và $h(0) = h(n)$. Theo giả thiết qui nạp tồn tại n cặp $(\overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_i)$ thoả mãn

$$\begin{cases} h(\overline{\alpha}_i) = h(\overline{\beta}_i) \\ \quad \overline{\beta}_i - \overline{\alpha}_i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Đặt $\alpha_i = \overline{\alpha_i}$ nếu $\alpha_i \in [0, x_o]$; $\beta_i = \overline{\beta}_i$ nếu $\beta_i \in [0, x_o]$,
$\alpha_i = \overline{\alpha}_i + 1$ nếu $\alpha_i \in (x_o, n]$; $\beta_i = \overline{\beta}_i + 1$ nếu $\beta_i \in (x_o, n]$.

Rõ ràng

$$\begin{cases} f(\alpha_i) = f(\beta_i) \\ \qquad \beta_i - \alpha_i \in \mathbb{N} \\ \quad (\alpha_i, \beta_i) \neq (x_o, x_o + 1),\ \forall i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Đặt $\alpha_{n+1} = x_o, \beta_{n+1} = x_o + 1$. Ta có điều cần chứng minh.

Bài 1.12. Cho $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ là một hàm đơn điệu tăng sao cho $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ là một hàm đơn điệu giảm. Chứng minh rằng f liên tục trên $(0,+\infty)$.

Bạn đọc tự giải.

Bài 1.13. Cho f là một hàm liên tục trên $[a,+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$.

a) Chứng minh rằng f bị chặn ở trên $[a,+\infty)$.

b) Chứng minh rằng f liên tục đều trên $[a,+\infty)$.

c) Giả sử thêm rằng $c>f(a)$. Chứng minh rằng tồn tại $x_o\in[a,+\infty)$ sao cho $f(x_o)=\inf\{f(x):x\in[a,+\infty)\}$.

Hướng dẫn:

a) Từ giả thiết ta suy ra tồn tại $b>a$ sao cho

$$|f(x)-c|\le 1 \text{ khi } x>b.$$

Do đó $|f(x)|\le 1+|c|$ khi $x>b$.

Vì f liên tục trên $[a,b]$ nên f bị chặn trên $[a,b]$. Ta đặt $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

Khi đó, $|f(x)|\le\max\{M,1+|c|\}$ với mọi $x\in[a,+\infty)$.

b) Với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại $x_o>a$ sao cho

$$|f(x)-c|<\varepsilon/3,\ \forall x\ge x_o.$$

Vì f liên tục trên $[a,x_o]$ nên f liên tục đều trên đoạn này, do đó tồn tại $\delta>0$ sao cho

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3},\ \forall x,y\in[a,x_o].$$

Bây giờ lấy $x,y\in[a,+\infty)$ thoả mãn $|x-y|<\delta$. Không mất tính tổng quát giả sử $x<y$.

* $x,y\in[a,x_o]:\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon/3<\varepsilon$.

* $x,y\ge x_o:\ |f(x)-f(y)|\le|f(x)-c|+|f(y)-c|<\dfrac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$.

* $x\in[a,x_o],y>x_o:|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f(x_o)|+f(x_o)-f(y)|<\dfrac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$.

Vậy f liên tục đều trên $[a,+\infty)$.

c) Vì $f(a)<c$ nên tồn tại $b>a$ sao cho $f(x)>f(a)$ với mọi $x\ge b$. Hàm f liên tục trên $[a,b]$ nên tồn tại $x_o\in[a,b]$ sao cho $f(x_o)=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$.

Rõ ràng $f(x_o)\le f(a)<f(x)$ với mọi $x\ge b$. Vì vậy ta có

$$f(x_o)=\inf_{x\in[a,+\infty)}f(x).$$

Bài 1.14. Cho $f,g:[0,1]\to[0,1]$ là các hàm liên tục thoả mãn $f(g(x))=g(f(x))$ với mọi $x\in[0,1]$.

a) Chứng minh rằng tồn tại $x_o\in[0,1]$ sao cho $f(x_o)=g(x_o)$.

b) Kết luận còn đúng không nếu thay $[0,1]$ bởi $\mathbb{R}$?

Hướng dẫn:

a) Giả sử phương trình $f(x)=g(x)$ vô nghiệm. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $f(x)>g(x)$ với mọi $x\in[0,1]$. Khi đó tồn tại $x_o\in[0,1]$ sao cho

$$m=\inf_{x\in[0,1]}\{f(x)-g(x)\}=f(x_o)-g(x_o)>0.$$

Do đó $f(x) \geq g(x) + m,\ \forall x \in [0,1]$. Vậy $f(g(x)) \geq g(g(x)) + m,\ \forall x \in [0,1]$. Ta suy ra $f(f(x)) - m \geq g(f(x)) \geq g(g(x)) + m,\ \forall x \in [0,1]$.

Vì vậy $f(f(x)) \geq g(g(x)) + 2m$.

Bằng cách lặp lại quá trình này ta suy ra

$$\underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{\text{k lần}} \geq \underbrace{g(g(\cdots g(x))\cdots)}_{\text{k lần}} + k.m,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Suy ra $k.m \leq 1$, với mọi $k \in \mathbb{N}$. Điều này là mâu thuẫn. Vậy có $x_o \in [0,1]$ sao cho $f(x_o) = x_o$.

b) Kết luận không còn đúng nếu thay $[0,1]$ bởi $\mathbb{R}$. Chẳng hạn lấy $f(x) = x, g(x) = e^x$.

Bài 1.15. Cho $f, g : [0,1] \to [0,1]$ là các hàm liên tục thoả mãn $f(g(x)) = g(f(x))$ với mọi $x \in [0,1]$. Giả sử f là một hàm đơn điệu. Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in [0,1]$ sao cho $f(x_o) = g(x_o) = x_o$.

Hướng dẫn:

Vì g liên tục nên tồn tại $a \in [0,1]$ sao cho $g(a) = a$. Đặt $x_1 = f(a),\ x_2 = f(x_1), \cdots, x_n = f(x_{n-1})$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $(x_n)_n$ là một dãy đơn điệu và bị chặn. Vì vậy tồn tại $x_o \in [0,1]$ sao cho $x_o = \lim\limits_{x\to\infty} x_n$. Do hàm f liên tục nên ta cũng có $f(x_o) = x_o$ (chú ý rằng $x_n = f(x_{(n-1)})$).

Mặt khác $g(x_o) = g(f(x_o)) = f(g(x_o)) = f\big(g(\lim\limits_{x\to\infty} x_n)\big) = \lim\limits_{x\to\infty} f(g(x_n))$.

Dễ thấy rằng $g(x_n) = x_n$ với mọi n. Do đó

$$g(x_o) = \lim_{x\to\infty} f(g(x_n)) = \lim_{x\to\infty} f(x_n) = f(x_o) = x_o.$$

Bài 1.16. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \to 0 \quad (h \to \infty) \quad (*)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

a) Nếu f là hàm số lẻ thì $f(x) = Ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Nếu f là hàm số chẵn thì f là hàm hằng.

c) Chứng minh rằng $f(x) = Ax + B,\ A, B = const$.

Lời giải:

a) Từ giả thiết ta có:

$$f(x) = \frac{1}{2} \lim_{h\to\infty} \Big[f(x+h) + f(x-h)\Big],\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
f(x+y) &= \frac{1}{2} \lim_{h\to\infty} \Big[f(x+y+h) + f(x+y-h)\Big] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{h\to\infty} \Big[f(x+y+h) + f(x-y-h) + f(x+y-h) - f(x-y-h)\Big] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{h\to\infty} \Big[f(x+y+h) + f(x-y-h) + f(x+y-h) + f(y-(x-h))\Big] \\
&= f(x) + f(y).
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $f(x) = Ax,\ A = const$.

b) Bạn đọc tự giải.

c) Hướng dẫn:

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \ h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Vì g là hàm số chẵn thoả mãn điều kiện (*), h là hàm số lẻ thoả mãn điều kiện (*), nên ta suy ra $f(x) = Ax + B$ từ câu a) và câu b).

Bài 1.17. Cho f, g là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn

$$\begin{cases} |f(x) - x| \le g(x) - g(f(x)), \ \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) \ge 0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có nghiệm.

Lời giải:

Chọn $x_1 \in \mathbb{R}$ và đặt $x_{n+1} = f(x_n), \ n \ge 1$.

Ta có

$$|f(x_n) - x_n| \le g(x_n) - g(x_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\iff |x_{n+1} - x_n| \le g(x_n) - g(x_{n+1}), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do đó $(g(x_n)_n)$ là một dãy giảm và bị chặn dưới. Đặt $l = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$.

Vì $|x_{n+1} - x_n| \le g(x_n) - g(x_{n+1})$, nên

$$|x_{n+p} - x_n| \le g(x_n) - g(x_{n+p}), \ \forall n, p \in \mathbb{N}.$$

Từ đó suy ra $(x_n)_n$ là một dãy Cauchy. Gọi $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ta dễ thấy rằng $f(c) = c$.

Bài 1.18. Cho f là một hàm xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x \text{ nếu } x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \\ x \text{ nếu } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

a) Khảo sát tính liên tục của f tại các điểm $0, 1, \frac{1}{2}$.

b) Khảo sát tính liên tục của f tại $a \in \mathbb{I} \cap [0, \frac{1}{2})$.

c) Chứng minh rằng f là một song ánh từ $[0,1]$ lên $[0,1]$ và tìm f^{-1}.

Hướng dẫn:

a) Hàm số gián đoạn tại $x_o = 0, x_o = 1$.

Tại $x_o = \dfrac{1}{2}, \quad f(x_o) = f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$.

Với mọi $x \in [0,1]$ ta có

$$\left| f(x) - f(\frac{1}{2}) \right| = \begin{cases} |x - \dfrac{1}{2}| \text{ nếu } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ |\dfrac{1}{2} - x| \text{ nếu } x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \end{cases}$$

$$= |x - \frac{1}{2}|.$$

Từ đó, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \left| f(x) - f(\frac{1}{2}) \right| = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} |x - \frac{1}{2}| = 0$.

Vậy f liên tục tại $\dfrac{1}{2}$.

b) Tại $a \in \mathbb{I} \cap [0, \frac{1}{2})$ ta có $f(a) = 1 - a$.

Vì $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ nên tồn tại dãy $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}$, có thể giả sử $x_n \in [0,1]$ với mọi n, sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Nếu f liên tục tại a thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ hay $a = 1 - a$, tức là $a = \dfrac{1}{2}$.

Điều này mâu thuẫn vì $a \in \mathbb{I} \cap [0, \frac{1}{2})$. Vậy f gián đoạn tại $a \in \mathbb{I} \cap [0, \frac{1}{2})$.

c) Bạn đọc tự giải.

Bài 1.19. Cho $f, g : [0,1] \to [0, +\infty)$ là các hàm liên tục thoả mãn

$$\sup_{x\in[0,1]} f(x) = \sup_{x\in[0,1]} g(x).$$

Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in [0,1]$ sao cho

$$(f(x_o))^2 + 3f(x_o) = (g(x_o))^2 + 3g(x_o).$$

Hướng dẫn:

Xét hàm $\varphi(x) = (f(x))^2 + 3f(x) - (g(x))^2 - 3g(x)$ thì φ liên tục trên $[0,1]$. Do tính liên tục của các hàm f và g nên tồn tại $x_1, x_2 \in [0,1]$ sao cho

$$f(x_1) = g(x_2) = \sup_{x\in[0,1]} f(x) = \sup_{x\in[0,1]} g(x).$$

Khi đó dễ dàng kiểm tra được rằng $\varphi(x_1) \geq 0$ và $\varphi(x_2) \leq 0$. Từ đây suy ra điều cần chứng minh.

Bài 1.20. Cho $a > 0$ và $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục sao cho

$$|f(x) - f(y)| \geq a|x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng f là song ánh.

Hướng dẫn:

Từ giả thiết suy ra f là đơn ánh. Hơn nữa, hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên theo Bài 2.4 ta có f là hàm đơn điệu.

Giả sử f là hàm đơn điệu tăng. Khi đó ta có

$$f(x) - f(0) \geq a(x - 0) \text{ với mọi } x > 0,$$

hay $f(x) - f(0) \geq ax$ với mọi $x > 0$.

Tương tự, $f(x) - f(0) \leq ax$ với mọi $x < 0$. Bằng cách qua giới hạn, ta được $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Vậy f là toàn ánh, do đó f là song ánh.

Trường hợp hàm f đơn điệu giảm, ta cũng kết luận được f là song ánh.

Bài 1.21. Cho $f : [0,1] \to [0,1]$ là một hàm liên tục thoả mãn $f(0) = 0.$ và $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|, \ \forall x, y \in [0,1]$.

a) Chứng minh rằng $f(x) = x$ với mọi $x \in [0,1]$.

b) Kết luận trên còn đúng không nếu thay $[0,1]$ bởi $\mathbb{R}$?

Hướng dẫn:

a) Từ giả thiết suy ra f đơn ánh, do đó f đơn điệu. Dễ thấy rằng $f(1) \geq 1$ nên f đơn điệu tăng, và ta suy ra được $f(1) = 1$.

Ta thấy

$$f(x) = |f(x) - f(0)| \geq x, \text{ với mọi } x \in [0,1].$$
$$1 - f(x) = |f(x) - f(1)| \geq 1 - x, \text{ với mọi } x \in [0,1].$$

Vì vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in [0,1]$.

b) Xét hàm $f(x) = 2x$.

Bài 1.22. Cho f là một hàm liên tục trên $[0,1]$ sao cho $f(0) = f(1)$.

a) Chứng minh rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}$, phương trình $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$ luôn luôn có nghiệm trong $[0, 1 - \frac{1}{n}]$.

b) Tìm tất cả các số thực $d \in (0,1)$ sao cho phương trình $f(x) = f(x + d)$ luôn luôn có nghiệm trong $[0, 1 - d]$.

Hướng dẫn:

a) Đặt $\varphi(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$ thì φ liên tục trên $[0, 1 - \frac{1}{n}]$. Ta thấy:

$$\varphi(0) + \varphi(\frac{1}{n}) + \cdots + \varphi(\frac{n-1}{n}) = f(0) - f(1) = 0.$$

Nếu $\varphi(\frac{k}{n}) = 0$ với mọi $k \in \{0, 1, \cdots n-1\}$ thì ta có điều phải chứng minh.

Nếu tồn tại $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ sao cho $\varphi(\frac{k}{n}) \neq 0$, giả sử $\varphi(\frac{k}{n}) > 0$, thì lúc đó ta luôn tìm được $k' \neq k, k' \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ sao cho $\varphi(\frac{k'}{n}) < 0$. Do đó, tồn tại $x_o \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ sao cho $\varphi(x_o) = 0$.

b) Hãy chứng tỏ $d = \frac{1}{n}$.

Bài 1.23. Chứng minh rằng tồn tại dãy số thực $(a_n)_n \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ sao cho $\cos a_n = a_n^n$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Hướng dẫn:

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $\varphi_n(x) = \cos x - x^n$. Ta thấy φ_n liên tục trên $[0, \frac{\pi}{2}]$ và $\varphi_n(0) > 0, \varphi_n(\frac{\pi}{2}) = -(\frac{\pi}{2})^n < 0$. Vì vậy tồn tại $a_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ sao cho $\varphi_n(a_n) = 0$, tức là $\cos a_n = a_n^n$.

Vì $a_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ nên $\cos a_n \in [0,1]$. Do đó $0 \leq a_n^n \leq 1$.

Suy ra $\cos 1 \leq a_n^n = \cos a_n \leq 1$. Từ đó ta có $(\cos 1)^{\frac{1}{n}} \leq a_n \leq 1$.

Vậy $\underset{x\to\infty}{\rightarrow} \lim a_n = 1$.

Bài 1.24. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục thoả mãn $f(x+1) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng f là hàm bị chặn.

b) Chứng minh rằng f luôn đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

c) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = f(x + \pi)$ luôn có nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn:

a) Hàm f liên tục trên đoạn $[0,1]$ nên bị chặn trên đoạn này. Do đó, tồn tại $M > 0$ sao cho với mọi $x \in [0,1]$ thì $|f(x)| \leq M$.

Xét $x \in \mathbb{R}$ bất kỳ. Khi đó tồn tại $n \in \mathbb{Z}$ để $x + n$ thuộc $[0,1]$. Chú ý rằng từ giả thiết ta suy ra $f(x) = f(x+n)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$. Vì vậy

$$|f(x)| = |f(x+n)| \leq M.$$

Tóm lại, hàm f bị chặn trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm f liên tục trên $[0,1]$ nên đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn này. Vì $f(x) = f(x+1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên ta suy ra f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

c) Bạn đọc tự giải.

Bài 1.25. Liệu có tồn tại hay không một hàm liên tục $f : [0,1] \to [0,1]$ và hai tập con A, B của $[0,1]$ sao cho $A \cup B = [0,1], A \cap B = \emptyset$ và $f(A) \subset B,\ f(B) \subset A$?

Hướng dẫn:

Giả sử tồn tại 2 tập A, B và hàm $f : [0,1] \to [0,1]$ thoả mãn các điều kiện của bài toán.

Ta có: $f(0) \geq 0,\ f(1) \leq 1$. Vì f liên tục trên $[0,1]$ nên suy ra tồn tại $x_o \in [0,1]$ sao cho $f(x_o) = x_o$.

Nếu $x_o \in A$ thì $f(x_o) = x_o \in B$. Do đó $x_o \in A \cap B$, tức là $A \cap B \neq \emptyset$, điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Lập luận tương tự ta cũng có điều mâu thuẫn nếu $x_o \in B$.

Vậy không tồn tại hàm f và 2 tập A, B thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài 1.26. Cho $M > 0$ và f là một hàm liên tục thoả mãn

$$\Big|f(x+y) - f(x) - f(y)\Big| \leq M, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng với mỗi $x \in \mathbb{R}$, luôn tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(nx)}{n}$.

Hướng dẫn:

Bằng qui nạp ta dễ dàng suy ra

$$\big|f(nx) - nf(x)\big| \leq M, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó $\big|mf(nx) - nf(mx)\big| = \Big|m[f(nx) - nf(x)] - n[f(mx) - mf(x)]\Big| \leq (m+n)M$.

Vì vậy $\left|\dfrac{f(nx)}{n} - \dfrac{f(mx)}{m}\right| \leq M(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m})$. Từ đấy suy ra $\Big(\dfrac{f(nx)}{n}\Big)_n$. là một dãy Cauchy. Do đó nó hội tụ, tức là tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(nx)}{n}$.

Bài 1.27. Cho f là một hàm liên tục trên $[a,b]$ và $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [a,b]$ sao cho

$$f(x) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Hướng dẫn:

Đặt $\alpha = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$. Hàm f liên tục trên $[a,b]$ nên tồn tại x^*, x^{**} thuộc $[a,b]$ sao cho

$$f(x^*) = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(x^{**}) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Không mất tổng quát, giả sử $x^* \leq x^{**}$. Khi đó, hàm f liên tục trên đoạn $[x^*, x^{**}]$ nên theo định ký Bolzano-Cauchy, f nhận mọi giá trị trung gian giữa $f(x^*)$ và $f(x^{**})$. Vì $\alpha \in [f(x^*, f(x^{**})]$ nên tồn tại $c \in [x^*, x^{**}] \subset [a,b]$ sao cho $\alpha = f(c)$.

Bài 1.28 Cho $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ là một hàm liên tục.

a) Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = +\infty.$$

b) Khẳng định câu a) còn đúng không nếu thay $[0, +\infty)$ bởi $(0, +\infty)$?

Hướng dẫn:

a) Điều kiện cần là rõ ràng. Ta chứng minh điều kiện đủ.

Giả sử $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < +\infty$. Khi đó tồn tại số $N > 0$ sao cho với mọi n, tồn tại $x_n > n$ và $0 \leq f(x_n) \leq N$. Hàm f liên tục trên $[0, N]$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho $f(x) \leq M$ với mọi $x \in [0, N]$.

Như vậy, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại $x_n > n$ sao cho $f(f(x_n)) \leq M$. Điều này trái với giả thiết $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = +\infty$.

b) Xét $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ với $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Ta có: $f(f(x)) = x \to +\infty$ khi $x \to +\infty$. Tuy nhiên $f(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$.

Bài 1.29. Cho $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ có tính chất: với mọi $\varepsilon > 0$, tập $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \varepsilon\}$ là hữu hạn.

a) Chứng minh rằng với mỗi khoảng mở $(a, b) \subset \mathbb{R}$, tồn tại $x_o \in (a, b)$ sao cho $f(x_o) = 0$.

b) Hãy chứng minh f liên tục tại mọi x_o thoả mãn $f(x_o) = 0$.

Hướng dẫn:

a) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $A_n = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \dfrac{1}{n}\}$. Vì A_1 hữu hạn nên tồn tại $a_1, b_1 \in (a, b), a_1 < b_1,\ |b_1 - a_1| < 1$ và

$$[a_1, b_1] \cap A_1 = \emptyset.$$

Bằng qui nạp, ta xây dựng được dãy đoạn đóng lồng nhau $\big([a_n, b_n]\big)_n$ có tính chất $|b_n - a_n| < \dfrac{1}{n}$ với mọi n và $[a_n, b_n] \cap A_n = \emptyset$.

Theo bổ đề Căng to, tồn tại $x_o \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n]$. Dễ thấy rằng $0 \leq f(x_o) \leq \dfrac{1}{n}$, từ đó suy ra $f(x_o) = 0$.

b) Với mọi $\varepsilon > 0$, ta có tập $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \varepsilon\}$ là hữu hạn và $x_o \notin A_\varepsilon$. Vì vậy tồn tại $\delta > 0$ sao cho $[x_o - \delta, x_o + \delta] \cap A_\varepsilon = \emptyset$. Khi đó, $0 \leq f(x) \leq \varepsilon$ với $|x - x_o| < \delta$, tức là f liên tục tại x_o.

Bài 1.30. Cho $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hai hàm số bị chặn và $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số xác định bởi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \sup_{t\in[0,1]} \big|f(t) + xg(t)\big|.$$

Chứng minh rằng tồn tại $K > 0$ sao cho

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x - y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn:

Với mọi $t \in [0, 1]$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$\big[f(t) + xg(t)\big] - \big[f(t) + yg(t)\big] = (x - y)g(t) \leq K.|x - y|$ với $K = \sup\limits_{t\in[0,1]} |g(t)|$ hay $f(t) + xg(t) \leq f(t) + yg(t) + K|x - y|$, với mọi $t \in [0, 1]$. Từ đây lấy supremum hai vế ta được $\varphi(x) \leq \varphi(y) + K.|x - y|$.

Lý luận tương tự, ta có $\varphi(y) \leq \varphi(x) + K.|x - y|$.

Từ đó, $\big|\varphi(x) - \varphi(y)\big| \leq K.|x - y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 1.31. Cho hàm số f liên tục trên $[0, +\infty), a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ và

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Chứng minh rằng nếu $b > a = f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)$ thì tồn tại các số thực $b_i > a_i, i = \overline{1, n}$ sao cho

$$b = f(b_1) + f(b_2) + \cdots + f(b_n).$$

Hướng dẫn:

a) Đặt $\varphi(x) = f(a_1 + x) + f(a_2 + x) + \cdots + f(a_n + x) - b$ thì φ là liên tục trên $[0, +\infty)$. Ta có $\varphi(0) = a - b < 0$. Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại $x_o > 0$ sao cho $\varphi(x_o) > 0$.

Từ đó $\varphi(0).\varphi(x_o) < 0$. Vậy tồn tại $\varepsilon \in (0, x_o)$ sao cho $\varphi(\varepsilon) = 0$ hay $b = f(a_1 + \varepsilon) + f(a_2 + \varepsilon) + \cdots + f(a_n + \varepsilon)$.

Đặt $b_i = a_i + \varepsilon$, ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.32. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục thoả mãn $f(f(x) = -x^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh $f(x) \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn:

Với mọi $x \le 0$, gọi $y \in \mathbb{R}$ sao cho $x = -y^2$. Khi đó

$$f(x) = f(-y^2) = f(f(f(y))) = -[f(y)]^2 \le 0.$$

Ta sẽ chứng minh thêm rằng $f(x) \le 0$ với mọi $x > 0$. Thật vậy, từ giả thiết suy ra f đơn ánh trên $(0, +\infty)$, do đó đơn điệu trên khoảng này.

Giả sử tồn tại $x_o \in (0, +\infty)$ sao cho $f(x_o) > 0$. Gọi x_1, x_2 là 2 số thực thoả mãn $0 < x_o < x_1 < x_2$.

Xét trường hợp f là đơn điệu tăng trên $(0, +\infty)$. Khi đó ta có

$$0 < f(x_o) \le f(x_1) \le f(x_2).$$

nên $-x_1^2 \le -x_2^2$ hay $x_1 \ge x_2$. Điều này là mâu thuẫn.

Lý luận tương tự cho trường hợp f đơn điệu giảm ta cũng có điều mâu thuẫn.

Từ đó suy ra $f(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 1.33. Có tồn tại hay không hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn một trong hai điều kiện dưới đây

a) $f(x) \in \mathbb{Q}$ khi và chỉ khi $f(x+1) \in \mathbb{I}$.

b) $f(x) \in \mathbb{I}$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$ và $f(x) \in \mathbb{Q}$ với mọi $x \in \mathbb{I}$.

Hướng dẫn:

a) Giả sử tồn tại hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $f(x) \in \mathbb{Q}$ khi và chỉ khi $f(x+1) \in \mathbb{I}$.

Xét hàm $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Khi đó $g(x) \in \mathbb{I}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Kết hợp với tính liên tục của hàm g ta suy ra $g(x)$ phải là hàm hằng tức là

$$f(x+1) - f(x) = g(x) = c \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Vì vậy, c phải là số vô tỷ và ta có $f(x+1) = c + f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết, ta suy ra tồn tại x_o sao cho $f(x_o) \in \mathbb{Q}$. Lúc đó ta có $f(x_o + 2) \in \mathbb{Q}$. Tuy nhiên, ta lại có $f(x_o + 2) = 2c + f(x_o)$ nên $f(x_o + 2) - f(x_o) = 2c$. Điều này mâu thuẫn vì $c \in \mathbb{I}$.

b) Tương tự câu a), bạn đọc tự giải.

Bài 1.34. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và nhận những giá trị trái dấu. Chứng minh rằng tồn tại 3 số a, b, c lập thành cấp số cộng sao cho $f(a) + f(b) + f(c) = 0$.

Hướng dẫn:

Theo giả thiết, tồn tại x sao cho $f(x) > 0$. Vì hàm f liên tục nên trong một lân cận của x ta có $f(x) > 0$. Khi đó, ta tìm được một cấp số cộng a_o, b_o, c_o mà $f(a_o) + f(b_o) + f(c_o) > 0$.

Tương tự, ta cũng tìm được cấp số cộng a_1, b_1, c_1 mà $f(a_1) + f(b_1) + f(c_1) < 0$.

Với $t \in [0, 1]$, xét cấp số cộng $a(t), b(t), c(t)$ cho bởi

$$a(t) = a_o(1-t) + a_1 t.$$

$$b(t) = b_o(1-t) + b_1 t.$$

$$c(t) = c_o(1-t) + c_1 t.$$

Xét hàm số $F(t) = f(a(t)) + f(b(t)) + f(c(t))$ thì F liên tục trên $[0,1]$. Dễ thấy rằng $F(0) > 0$ và $F(1) < 0$. Vì vậy, tồn tại $t_o \in [0,1]$ sao cho $F(t_o) = 0$. Như vậy, ta có cấp số cộng phải tìm là $a(t_o), b(t_o), c(t_o)$.

Bài 1.35. Cho f là một hàm liên tục và tồn tại $T > 0$ sao cho

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0;\ f(x) = f(x+T),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải:

Giả sử tồn tại x_o sao cho $f(x_o) \neq 0$. Khi đó tồn tại $A > 0$ sao cho

$$|f(x)| < \frac{|f(x_o)|}{2} \text{ khi } |x| \geq A.$$

Ta có $x_n = x_o + nT > A$ khi n đủ lớn. Do vậy

$$|f(x_n)| = |f(x_o + nT)| = |f(x_o)| < \frac{|f(x_o)|}{2}$$

khi n đủ lớn. Mâu thuẫn này chứng tỏ $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 1.36. Cho f và g là các hàm tuần hoàn với các chu kỳ tương ứng là $T_f, T_g > 0$ và $\lim\limits_{x\to\infty} \big[f(x) - g(x)\big] = 0$.

a) Chứng minh rằng $T_f = T_g$.

b) Chứng minh rằng $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải:

a) Từ giả thiết suy ra $f(x+T_f) - g(x+T_g) \to 0$ $(x \to \infty)$. Do đó $f(x) - g(x+T_f) \to 0,\ (x \to \infty)$.

Vậy $g(x) - g(x+T_f) \to 0,\ (x \to \infty)$.

Theo Bài tập 1.35. $g(x) = g(x+T_f)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $T_f \geq T_g$. Tương tự $T_g \geq T_f$. Như vậy $T_f = T_g$.

b) Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$.

Ta có

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0 \\ h(x+T_f) = h(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Theo Bài tập 1.35., $h(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 1.37. Cho f là một hàm xác định trên $\mathbb{R}$ thoả mãn

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R} (K > 0).$$

a) Chứng minh rằng nếu $K < 1$ thì phương trình $f(x) = x$ luôn có duy nhất nghiệm.

b) Giả sử thêm rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x+n) = 0$, hãy chứng minh $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c) Hãy chỉ ra một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n) = 0$, nhưng $f(x) \not\longrightarrow 0$, khi $x \to +\infty$.

Lời giải:

a) Lấy $x_o \in \mathbb{R}$. Đặt $x_1 = f(x_o);\ x_{n+1} = f(x_n), n \geq 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned}\big|f(x_{n+1})-f(x_n)\big| &\le K|x_{n+1}-x_n|\\ &\le K|f(x_n)-f(x_{n+1}| \le K^2|x_n-x_{n+1}|\\ &\le \cdots \le K^{n+1}|x_1-x_o|.\end{aligned}$$

Do đó với mọi $n, p \in \mathbb{N}$ thì

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &\le \big|x_{n+p}-x_{n+p-1}\big| + \cdots + \big|x_{n+1}-x_n\big|\\ &\le \big(K^{n+p}+\cdots+K^{n+1}\big)|x_o-x_1|\\ &\le K^n\big(K+K^2+\cdots+K^p\big)|x_o-x_1|\\ &\le K^n\frac{K}{1-K}|x_o-x_1| \to 0\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

Do vậy $(x_n)_n$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$ nên hội tụ. Gọi $x_\star = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Do tính liên tục của f và cách xây dựng $(x_n)_n$ ta có $f(x_\star) = x_\star$.

Nếu tồn tại $x'_\star \neq x_\star$ sao cho $f(x'_\star) = x'_\star$,

thì $|x_\star - x'_\star| = |f(x_\star) - f(x'_\star)| \le K|x_\star - x'_\star|$.

Vì $K < 1$ nên điều này vô lý. Vậy phương trình $f(x) = x$ có duy nhất nghiệm trên $\mathbb{R}$.

b) Với mỗi $\varepsilon > 0$, gọi $x_o = 0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$ với $\big|x_i - x_{i-1}\big| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$, $i = \overline{1,m}$.

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_i+n) = 0$ nên tồn tại N sao cho $|f(x_i+n)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \ge N$, $\forall i = \overline{1,m}$.
Với mọi $x > N$, gọi n là số nguyên dương sao cho $n \le x$, $\ x - n < 1$.
Khi đó $n \ge N$ và tồn tại x_i sao cho $|x-(x_i+n)| = |x_i-(x-n)| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$.
Do đó $|f(x) - f(x_i+n)| \le K|x-(x_i+n)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Vì vậy $|f(x)| < |f(x_i+n)| + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Bài 1.38. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[0,1]$ thoả mãn

$$\forall x \in [0,1],\ 0 < f(x) < g(x).$$

Cho $(x_n)_n$ là một dãy bất kỳ của đoạn $[0,1]$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta đặt $y_n = \Big[\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\Big]^n$.
Chứng minh rằng dãy $(y_n)_n$ hội tụ và tính $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Hướng dẫn:

Xét hàm h xác định trên $[0,1]$ bởi $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Dễ thấy rằng h liên tục trên $[0,1]$ và $h([0,1]) \subset (0,1)$.

Mặt khác, h liên tục nên $h([0,1]) = [m, M]$ với $m, M \in (0,1)$. Vì vây

$$\forall x \in [0,1],\ m \le \frac{f(x)}{g(x)} \le M.$$

Đặc biệt, với $n \in \mathbb{N}$ ta có $m \le \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \le M$. Điều này kéo theo

$$\forall n \in \mathbb{N},\ m^n \le y_n \le M^n.$$

Vì $m, M \in (0,1)$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} m^n = \lim\limits_{n\to\infty} M^n = 0$, từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Chương II. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

Bài 2.1. Khảo sát tính khả vi của các hàm số sau:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ nếu } x \in \mathbb{Q} \\ x^3 \text{ nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

c) $f(x) = [x] \sin^2 \pi x$.

d) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$.

e) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{2}, \; x = \dfrac{1}{n^2} \\ 1, \; \text{với } x \text{ còn lại.} \end{cases}$

Giải:

a) Tại mỗi $x \neq 0$, hàm f không liên tục nên không khả vi

- Tại $x_o = 0$ ta có

$$\Big|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\Big| = \Big|\frac{f(x)}{x}\Big| \leq |x|, \; \forall x \neq 0$$

Vì $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ nên $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ do đó f có đạo hàm tại $x_o = 0$ và $f'(0) = 0$.

b) Dễ chứng minh rằng f không liên tục tại mỗi $x \notin \{0, 1\}$ nên f không có đạo hàm tại các điểm đó.

- Tại $x = 0$, ta có

$$\Big|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\Big| = \frac{|f(x)|}{|x|}| \leq |x| + x^2, \; \forall x \neq 0$$

Vì $\lim\limits_{x\to 0}(|x| + x^2) = 0$ nên $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

Do đó f có đạo hàm tại $x = 0$ và $f'(0) = 0$.

- Tại $x = 1$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, \text{ nếu } x \in \mathbb{Q}, x \neq 1 \\ \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}, \; \text{ nếu } x \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + 1, \text{ nếu } x \in \mathbb{Q}, x \neq 1 \\ x^2 + x + 1, \text{ nếu } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Chọn dãy $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}, \; x_n \to 1 (n \to \infty) \; x_n \neq 1, \forall n$, ta có

$$\frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1} \to 2 \; (n \to \infty)$$

Chọn dãy $(x'_n)_n \subset \mathbb{I},\ x_n \to 1\ (n \to \infty)$ ta có

$$\frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1} \to 3\ (n \to \infty)$$

Vậy f không có đạo hàm tại $x = 1$.
c) Hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Bài 2.2 Cho

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} + ax, \text{ nếu } x \neq 0 \\ 0, \text{ nếu } x = 0 \end{cases} (0 < a < 1)$$

a) Chứng minh rằng f có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng với mỗi $\alpha > 0$, hàm f' đổi dấu trên $(-\alpha, \alpha)$.
Từ đó suy ra rằng hàm f không đơn điệu trên mỗi khoảng mở chứa 0.

Giải:
a) Dễ dàng chứng minh được f có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và

$$f'(x) = \begin{cases} a + 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, \text{ nếu } x \neq 0 \\ a, \text{ nếu } x = 0 \end{cases}$$

Ta có $f'(\dfrac{1}{n\pi}) = (-1)^{n+1} + a,\ f'(\dfrac{1}{(n+1)\pi}) = (-1)^n + a$. Vì $a \in (0,1)$ nên $f'(\dfrac{1}{n\pi})$ và $f'(\dfrac{1}{(n+1)\pi})$ luôn trái dấu nhau. Chọn n đủ lớn sao cho $\left(\dfrac{1}{(n+1)\pi}, \dfrac{1}{n\pi}\right) \subset (-\alpha, \alpha)$.
Ta có f' đổi dấu trên $(-\alpha, \alpha)$.

Vì f' đổi dấu trên mỗi khoảng mở chứa 0 nên f không đơn điệu trên mỗi khoảng mở chứa 0.

Bài 2.3 (định lý Darboux) Cho f là một hàm khả vi trên $[a, b]$ và $f'(a) < 0 < f'(b)$.

a) Chứng minh rằng f đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm $x_o \in (a, b)$.

b) Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in (a, b)$ sao cho $f'(x_o) = 0$.

Giải:
a) đặt $M = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

Nếu $f(a) = M$ thì $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. điều này vô lý vì $f'(a) < 0$.

Nếu $f(b) = M$ thì $\lim\limits_{x \to b^+} \to \lim \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0$.
điều này vô lý vì $f'(b^-) > 0$.

Do f liên tục trên $[a, b]$ nên f phải đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm $x_o \in [a, b],\ x_o \neq a,\ x_o \neq b$. Do đó tồn tại $x_o \in (a, b)$ sao cho

$$f(x_o) = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

b) Suy ra trực tiếp từ câu a) và Bổ đề Fermat.

Bài 2.4. Cho f là một hàm số khả vi tại $x_o \in (a, b)$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} n\Big[f(x_o + \frac{1}{n}) - f(x_o)\Big] = f'(x_o)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o + ch) - f(x_o)}{h} = cf'(x_o)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o + ch) - f(x_o + (c-1)h)}{h} = f'(x_o)$$

Bạn đọc tự giải.

Bài 2.5. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$|f(x) - f(y)| \le k|x - y|^\alpha,\ \forall x, y \in \mathbb{R}\ (\alpha > 1, k \ge 0)$$

Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm hằng trên $\mathbb{R}$.

Giải:

Với mỗi $h \neq 0$ ta có $\left|\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \le k|h|^{\alpha-1}$.

Vì $\lim\limits_{h\to 0} k|h|^{\alpha-1} = 0$ nên $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó

$$f'(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy $f(x) = const,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 2.6. Cho $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi.

a) Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = a$, thì $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$.

b) Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = +\infty$ thì $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

c) Chiều ngược lại trong câu a) có đúng không ?

Lời giải:

a) Trước hết ta chứng minh: nếu $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi'(x) = 0$ thì

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0,\ \text{với } \varphi \text{ khả vi trên } (0, +\infty).$$

Với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $c > 0$ sao cho $|\varphi'(x)| \le \dfrac{\varepsilon}{2},\ \forall x \ge c$.

Do đó với mỗi $x \ge c$ thì

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(x) - \varphi(c) + \varphi(c)}{x} = \frac{\varphi'(\xi)(x - c) + \varphi(c)}{x}$$

Vì vậy

$$|\frac{\varphi(x)}{x}| \le \frac{\varepsilon}{2}(1 - \frac{c}{x}) + \frac{|\varphi(c)|}{x} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|\varphi(c)|}{x}$$

Chẳn hạng số $c_1 > c$ sao cho $\left|\dfrac{\varphi(c)}{x}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ với mỗi $x > c_1$.

Khi đó với mỗi $x > c_1$ ta có $\left|\dfrac{\varphi(x)}{x}\right| < \varepsilon$.

Vậy $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = 0$.

Bây giờ ta đặt $\varphi(x) = f(x) - ax$. Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi'(x) = 0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{f(x)}{x} - a) = 0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$.

b) Từ giả thiết ta chứng minh được $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Kết quả được suy ra từ qui tắc L'Hospital.

c) Xét hàm số $f(x) = x + \sin x$. Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ nhưng $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ không tồn tại.

Bài 2.7. Cho f là một hàm liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên $(0,1)$ sao cho $f(0) = 0,\ f(1) = 1$.

a) Chứng minh rằng tồn tại các điểm $x_1, x_2, \cdots, x_{2002},\ 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2002} < 1$ sao cho

$$\frac{1}{2002}[f'(x_1) + f'(x_2) + \cdots + f'(x_{2002})] = 1.$$

b) Chứng minh rằng tồn tại $a, b \in (0,1), a \neq b$ sao cho

$$f'(a).f'(b) = 1$$

Lời giải:

a) Theo định lý Lagrange, với mỗi $i \in \{1, 2, \cdots, 2002\}$, tồn tại $x_i \in \left(\dfrac{i-1}{2002}, \dfrac{i}{2002}\right)$ sao cho

$$f(\frac{i}{2002}) - f(\frac{i-1}{2002}) = f'(x_i).\frac{1}{2002}.$$

Do vậy

$$\frac{1}{2002}\sum_{i=1}^{2002} f'(x_i) = f(1) - f(0) = 1.$$

b) Bạn đọc tự giải.

Bài 2.8. Cho f, g là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$g'(x) = f(g(x)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = c$ thì $f(c) = 0$.

Lời giải:

Từ giả thiết ta có $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x) = f(c)$.

Nếu $f(c) > 0$ thì tồn tại $x_o > 0$ sao cho

$$g'(x) \geq \frac{f(c)}{2} > 0, \forall x > x_o.$$

Vì vậy

$$g(x) = \int\limits_{x_o}^{x} g'(t)dt + g(x_o) \geq \frac{f(c)}{2}(x - x_o) + g(x_o)$$

điều này mâu thuẫn vì

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(c)}{2}(x-x_o)+g(x_o)\right]=+\infty.$$

Tương tự nếu $f(c)<0$ thì cũng dẫn đến mâu thuẫn. Vậy $f(c)=0$.

Bài 2.9. Cho f là một hàm có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+\sin x)\leq f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng phương trình $f'(x)=0$ có vô số nghiệm.

b) Hãy chỉ ra một hàm thỏa mãn điều kiện trên.

Giải:

đặt $g(x)=f(x)-f(x+\sin x)$.

Ta có

$$\begin{cases} g(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \\ g(k2\pi)=0,\ \forall k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Vì vậy mỗi điểm $x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ là cực trị địa phương của hàm g. Theo bổ đề Fermat thì

$$g'(k2\pi)=0$$

Ta có

$$g'(k2\pi)=f'(k2\pi)-f'(k2\pi)(1+\cos k2\pi)=0$$
$$\iff f'(k2\pi)=0,\ \forall k\in\mathbb{Z}$$

b) $f(x)=\cos x$.

Bài 2.10. Cho f và g là các hàm có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x)\leq g(x),\forall x\in\mathbb{R} \\ f(x_o)=g(x_o).\end{cases}$$

Chứng minh rằng $f'(x_o)=g'(x_o)$.

Giải:

đặt $h(x)=g(x)-f(x)$.

Dễ thấy h đạt cực trị tại x_o, do đó $h'(x_o)=0$. Vì vậy

$$f'(x_o)=g'(x_o).$$

Bài 2.11. Cho f là một hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$. Chứng minh rằng $f'(0)$ tồn tại.

Hướng dẫn:

Xét tỷ số

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0},\ x\neq 0,$$

và dùng định lý Lagrange.

Bài 2.12. Cho f là một hàm xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(0)=0,\ f(x)\geq|\sin x|,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng đạo hàm của hàm f tại 0 không tồn tại.

Giải:

Giả sử $f'(0)$ tồn tại. Với mỗi $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ta có $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \geq \dfrac{\sin x}{x}$

Vì vậy

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geq \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Tương tự ta chứng minh được $f'(0^-) \leq -1$. Mâu thuẫn này chứng tỏ $f'(0)$ không tồn tại.

Bài 2.13. Cho $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$.

Giả sử rằng $f(x) \leq |\sin x|$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$$

Giải:

Ta có

$$|f'(0)| = \lim_{x\to 0} \Big|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Big| = \lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{|x|} = 1$$

Mặt khác $|f'(0)| = |a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n|$

Do đó $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

Bài 2.14. Cho $\mathbb{R} \to [0, +\infty)$ là một hàm có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho tồn tại $k > 0$ thỏa mãn

$$f(a) = 0,\ |f'(x)| \leq kf(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hãy chứng minh rằng $f(x) = 0,\ \forall x \in \Big[a - \dfrac{1}{2k}, a + \dfrac{1}{2k}\Big]$

Từ đó suy ra $f(x) = 0$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$.

Giải:

đặt $M = \sup\{f(x)\ :\ a - \dfrac{1}{2k} \leq x \leq a + \dfrac{1}{2k}\} < +\infty$

Với mỗi $x \in [a - \dfrac{1}{2k}, a + \dfrac{1}{2k}]$ ta có $|f(x)| = \Big|\int\limits_a^x f'(t)dt\Big|$

* Nếu $x \geq a$ thì

$$|f(x)| = \Big|\int_a^x f'(t)dt\Big| \leq \int_a^x |f'(t)|dt \leq k\int_a^x f(t)dt \leq kM(x-a) \leq \frac{M}{2}.$$

Tương tự nếu $x \leq a$ ta cũng có $|f(x)| \leq \dfrac{M}{2}$.

Vì vậy

$$f(x) = |f(x)| \leq \frac{M}{2},\ \forall x \in \Big[a - \frac{1}{2k},\ a + \frac{1}{2k}\Big].$$

Do đó

$$0 \leq M = \sup\Big\{f(x)\ :\ x \in \Big[a - \frac{1}{2k},\ a + \frac{1}{2k}\Big]\Big\} \leq \frac{M}{2}.$$

Vậy $M = 0$ và $f(x) = 0$ với mỗi $x \in \Big[a - \dfrac{1}{2k},\ a + \dfrac{1}{2k}\Big]$.

Bài 2.15. Cho f là hàm liên tục trên $[a, +\infty)$ thỏa mãn

$f(x) > 0,\ \forall x \in [a, +\infty)$ và $\inf\limits_{x\geq a} \dfrac{f'(x)}{f(x)} > 0$.

Chứng minh rằng với mỗi $\delta > 0$ ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{f((1+\delta)x)} = 0$

Giải:

Chọn a' sao cho $a' >$ max $\{1, a\}$. đặt $k = \inf\limits_{x \geq a} \dfrac{f'(x)}{f(x)} > 0$. Ta có

$$f'(x) \geq kf(x) > 0, \ \forall x \geq a'.$$

Từ đó suy ra f đơn điệu tăng trên $[a', +\infty)$ và khi $x \geq a'$

$$f((1+\delta)x) - f(x) = \int\limits_x^{(1+\delta)x} f'(t)dt \geq k \int\limits_x^{(1+\delta)x} f(t)dt \geq k\delta x f(x).$$

Do đó

$$f((1+\delta)x) \geq f(x)(1 + k\delta x), \ \forall x \geq a'.$$

Suy ra $0 < \dfrac{f(x)}{f((1+\delta)x)} \leq \dfrac{1}{1+k\delta x}, \ \forall x \geq a'.$

Từ đó ta có $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{f((1+\delta)x)} = 0.$

Bài 2.16. Cho f là một hàm liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1), f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho

$$f(c) + \frac{1}{2002} cf'(c) = 0.$$

Hướng dẫn:

Xét hàm $\varphi(x) = x^{2002} f(x)$. áp dụng định lý Rolle.

Bài 2.17. Cho $\alpha, \beta > 1, \ f$ khả vi trên $[0, 1], f(0) = 0$ và $f(x) > 0$ với mỗi $x \in (0, 1)$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho

$$\alpha \frac{f'(c)}{f(c)} = \beta . \frac{f'(1-c}{f(1-c)}.$$

Hướng dẫn:

Xét hàm $\varphi(x) = (f(x))^\alpha . (f(1-x)^\beta$.
áp dụng định lý Rolle.

Bài 2.18. Cho f là một hàm khả vi trên $\mathbb{R}, \ f'$ giảm ngặt.

a) Chứng minh rằng với mỗi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1).$$

b) Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to\infty} = l$ thì $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

c) Hãy tìm một ví dụ về hàm g khả vi trên $\mathbb{R}$ sao cho $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = l$ nhưng $g'(x)$ không tiến về 0 khi $x \to +\infty$.

Giải:

a) Theo định lý Lagrange, với mỗi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại c_1, c_2 sao cho $x - 1 < c_1 < x < c_2 < x + 1$ và

$$f(x+1) - f(x) = f'(c_2)$$
$$f(x) - f(x-1) = f'(c_1).$$

Vì f' giảm ngặt nên $f'(c_2) < f'(x) < f'(c_1)$.

Do đó $f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$.

b) Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ thì

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+1) - f(x)] = \lim_{x\to\infty}[f(x) - f(x-1)] = 0.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

c) Xét hàm $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0. \end{cases}$

Dễ chứng minh φ khả vi trên $\mathbb{R}$ nhưng $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)$ không tồn tại.

Bài 2.19. Cho f là một hàm xác định trên $[0, +\infty)$, $f(0) = 0$. Hàm g xác định bởi

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, \text{ nếu } x > 0 \\ f'(0), \text{ nếu } x = 0. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng nếu f' đơn điệu tăng trên $[0, +\infty)$ và f khả vi liên tục trên $[0, +\infty)$ thì g liên tục và đơn điệu tăng trên $[0, +\infty)$.

b) Chứng minh rằng nếu f khả vi liên tục đến cấp hai trên $[0, +\infty)$ thì g khả vi liên tục trên $[0, +\infty)$.

Giải:

a) * $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ khả vi trên $(0, +\infty)$ do đó g liên tục trên $(0, +\infty)$.

* $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x} = f'(0) = g(0)$.

Do vậy g liên tục trên $[0, +\infty)$.

Tại mỗi $x \in (0, +\infty)$,

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x) - \dfrac{f(x)}{x}}{x}.$$

Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (0, x)$ sao cho

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c).$$

Do vậy

$$g'(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x} \geq 0.$$

Vậy g là hàm đơn điệu tăng trên $(0, +\infty)$ và do đó g đơn điệu tăng trên $[0, +\infty)$.

b) Bạn đọc tự giải.

Bài 2.20 Cho f là một hàm khả vi trên $[0, 1]$ sao cho

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

Giải:

đặt

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, \text{ nếu } x \in (0,1] \\ 0, \text{ nếu } x = 0. \end{cases}$$

Khi đó φ là một hàm liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên $(0,1]$ và

$$\varphi'(1) = f'(1) - f(1) = -f(1)$$

* Nếu $f \equiv 0$ thì kết luận của bài toán là hiển nhiên.
* Xét $f \not\equiv 0$.
Th1: Có $x_o \in [0,1]$ sao cho $f(x_o) > 0$. Gọi $c \in [0,1]$ sao cho

$$\varphi(c) = \max_{x\in[0,1]} \varphi(x) = \max_{x\in[0,1]} \frac{f(x)}{x} > 0.$$

Ta có $c \neq 0$. Nếu $c = 1$ thì $\varphi(1) = f(1) > 0$ và $\varphi'(1) = -f(1) < 0$. Mặt khác

$$\varphi'(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} \geq 0.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ $c \neq 1$. Vậy $c \in (0,1)$. Theo bổ đề Fermat, ta có $\varphi'(c) = 0$ nên $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

Th2: Nếu có $x_o \in [0,1]$ sao cho $f(x_o) < 0$, ta gọi $c \in [0,1]$ sao cho

$$\varphi(c) = \inf_{x\in[0,1]} \varphi(x).$$

Lập luận tương tự đưa đến $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

Bài 2.21. Cho n là một số nguyên dương, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $(k = 1, 2, \cdots, n)$. Chứng minh rằng phương trình

$$x + \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx) = 0$$

có nghiệm trong $(-\pi, \pi)$.

Hướng dẫn:

Xét hàm

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(-\frac{a_k}{k}\cos kx + \frac{b_k}{k}\sin kx \Big),\ x \in [-\pi, \pi]$$

Khi đó $\varphi(\pi) = \varphi(-\pi)$. áp dụng định lý Rolle.

Bài 2.22.

a) Cho $c_1, c_2, \cdots, c_{2003}$ là các số thực thỏa mãn

$$c_1 - 3c_3 + 5c_5 - 7c_7 + \cdots + 2001c_{2001} - 2003c_{2003} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình

$$c_1 \cos x + 2^2 c_2 \cos 2x + \cdots + 2003^2.c_{2003} \cos 2003x = 0$$

có ít nhất 3 nghiệm trên $(-\pi, \pi)$.

b) Cho $a_1, a_2, \cdots, a_n$ thỏa mãn

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} = 0 \quad (n > 1).$$

Chứng minh rằng phương trình $a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} = 0$ có nghiệm trong $(0, 1)$.

c) Cho $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2k+1} = 0$.

Chứng minh rằng phương trình $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos(2k+1)x = 0$ có nghiệm trong $(0, \frac{\pi}{2})$.

Hướng dẫn:

a) Xét hàm

$$\varphi(x) = c_1 \sin x + 2c_2 \sin 2x + \cdots + 2003c_{2003} \sin 2003x.$$

Khi đó ta có: $\varphi(0) = \varphi(\frac{\pi}{2}) = \varphi(\pi) = \varphi(-\pi) = \varphi(-\frac{\pi}{2})$.

áp dụng định lý Rolle.

b) Xét hàm $\varphi(x) = a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^n}{n}$.

Ta có $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. áp dụng định lý Rolle.

c) Xét hàm

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k \sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Bài 2.22. Cho f là một hàm khả vi trên $\mathbb{R}$, $c, d \in \mathbb{R}$ sao cho

$$c < d \text{ và } f(c) = f(d),\ f'(c) > 0, f'(d) > 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại, $x_o \in (c, d)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x_o) = f(d) \\ f'(x_o) \leq 0. \end{cases}$$

Lời giải:

đặt $\varphi(x) = f(x) - f(d)$.

Ta có $\varphi(c) = \varphi(d) = 0,\ \varphi'(c) > 0,\ \varphi'(d) > 0$. Ta cần chứng minh tồn tại $x_o \in (c, d)$ sao cho $\varphi(x_o) = 0$.

Vì $\varphi'(c) = \underset{x \to o^+}{\to} \lim \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c} > 0$ nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\varphi(x) > 0,\ \forall x \in (c, c + \delta) \subset [c, d].$$

đặt $x_o = \sup \{\alpha \in [c, d] \ : \ \varphi(x) > 0, \forall x \in (c, c + \alpha)\}$.

Ta dễ dàng chứng minh $\varphi(x_o) = 0$ và $x_o \in (c, d)$. Ta có

$$\begin{aligned} \varphi'(x_o) = \varphi'(x_o^-) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_o)}{x - x_o} \\ &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\varphi(x)}{x - x_o} \leq 0. \end{aligned}$$

Bài 2.23. Cho f là một hàm có đạo hàm trên $[0,1]$ và

$$f'(0) < 0, \quad f'(1) < 0, \quad f(0) = f(1) = 0.$$

a) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong $(0,1)$.
b) Có thể khẳng định rằng tồn tại $x_1, x_2 \in (0,1),\ x_1 \neq x_2$ và

$$f'(x_1) = f'(x_2)?$$

Bạn đọc tự giải.

Bài 2.24. Cho f là hàm khả vi trên $[0,1], f(0) = 0, f(1) = 1$. Chứng minh rằng với mỗi $K_1, K_2 > 0$, tồn tại $x_1, x_2 \in (0,1)$, sao cho $x_1 \neq x_2$ và

$$\frac{K_1}{f'(x_1)} + \frac{K_2}{f'(x_2)} = K_1 + K_2.$$

Giải:

Xét hàm $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{K_1}{K_1 + K_2}$.

Ta có $\varphi(0) = -\dfrac{K_1}{K_1 + K_2} < 0, \quad \varphi(1) = \dfrac{K_2}{K_1 + K_2} > 0$.

Vì $\varphi(0).\varphi(1) < 0$, nên tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho

$$\varphi(c) = 0 \Longleftrightarrow f(c) = \frac{K_1}{K_1 + K_2}.$$

áp dụnh định lý Lagrange cho hàm f trên $[0,c]$ ta có:
$\exists x_1 \in (0,c)\ :\ f(c) - f(0) = f'(x_1)c$.

Do đó $\dfrac{K_1}{K_1 + K_2} = f'(x_1)c$ hay $\dfrac{K_1}{f'(x_1)(K_1 + K_2)} = c$.

áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên $[c,1]$ ta có:
$\exists x_2 \in (c,1)\ :\ f(1) - f(c) = f'(x_2)(1-c)$.

Như vậy $\dfrac{K_2}{f'(x_2)(K_1 + K_2)} = 1 - c$.

Do đó

$$\frac{K_1}{f'(x_1)(K_1 + K_2)} + \frac{K_2}{f'(x_2)(K_1 + K_2)} = 1$$

hay $\dfrac{K_1}{f'(x_1)} + \dfrac{K_2}{f'(x_2)} = 1$.

Bài 2.25. Cho f là hàm liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b). Biết rằng $f(a) \leq f(b)$ và

$$f(x) + f'(x) < \varepsilon,\ \forall x \in (a,b).$$

Chứng minh rằng $f'(x) < \varepsilon,\ \forall x \in (a,b)$.

Giải:

Vì f là hàm liên tục trên $[a,b]$ nên tồn tại $x_o \in [a,b]$ sao cho

$$f(x_o) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

+ Nếu $x_o \in (a,b)$ thì theo bổ đề Fermat $f'(x_o) = 0$. Do đó

$$f(x_o) = f(x_o) + f'(x_o) < \varepsilon.$$

Vì vậy $f(x) < \varepsilon,\ \forall x \in (a,b)$.

+ Giả sử $x_o = b$.

* Nếu có $x_1 \in (a,b)$ để $f(x_1) = f(b) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ thì $f'(x_1) = 0$ và ta cũng có

$$f(x) \le f(x_1) \le f(x_1) + f'(x_1) < \varepsilon, \quad \forall x \in (a,b).$$

* Nếu $f(x) < f(b)$ với mọi $x \in (a,b)$, thì ta cần chứng minh $f(b) \le \varepsilon$. Giả sử ngược lại $f(b) > \varepsilon$. Ta tìm được $\delta > 0$ sao cho $f(x) > \varepsilon, \forall x \in [b-\delta, b]$.

Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (b-\delta, b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(b-\delta)}{\delta} \ge 0.$$

Do vậy $f(c) + f'(c) > 0$.

Mâu thuẫn trên chứng tỏ $f(x) \le f(b) < \varepsilon, \ \forall x \in (a,b)$.

Bài 2.26. Cho f là một hàm khả vi trên $[-1,1], f(0) = 0$.

Tìm giới hạn của dãy $(u_n)_n$ với

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$$

Hướng dẫn: $(u_n)_n$ hội tụ về $\frac{1}{2}f'(0)$.

Bài 2.27. Cho f là hàm khả vi trên $[0,+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Chứng minh rằng với mỗi $d > 0$ ta có $\lim\limits_{x\to\infty} \Big[f(x+d) - f(x)\Big] = 0$.

Bạn đọc tự giải.

Bài 2.28. Cho f là một hàm thỏa mãn

$$f'(x) < 0 < f''(x), \forall x < 0$$
$$f''(x) < 0 < f'(x), \forall x > 0.$$

Chứng minh rằng $f'(0)$ không tồn tại.

Hướng dẫn:

Giả sử rằng $f'(0)$ tồn tại, hãy chứng minh rằng lúc đó $f'(0) = 0$. Hãy chỉ ra mâu thuẫn bằng các giả thiết trên.

Bài 2.29. Cho f là hàm liên tục trên (a,b). Giả sử rằng với mỗi $x \in (a,b)$, giới hạn

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2h}\Big[f(x+h) - f(x-h)\Big] = g(x)$$

tồn tại hữu hạn.

a) Chứng minh rằng nếu $g(x) \ge 0$ với mỗi $x \in (a,b)$ thì f là hàm đơn điệu tăng.

b) Chứng minh rằng nếu $g \equiv 0$ thì f là hàm hằng.

c) Chứng minh rằng nếu g liên tục trên (a,b) thì f khả vi liên tục trên (a,b).

Giải:

a) Trước hết xét trường hợp $g(x) > 0$ với mỗi $x \in (a,b)$. Giả sử f không phải là hàm đơn điệu tăng trên (a,b), ta tìm được $x_1, x_2 \in (a,b)$ sao cho $x_1 < x_2$ và $f(x_1) > f(x_2)$.

đặt $c = \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ và $\varphi(x) = f(x) - c$.

Ta có $\varphi(x_1) = f(x_1) - c > 0, \varphi(x_2) = f(x_2) - c < 0$.

đặt $\overline{x} = \sup \{\alpha \in (x_1, x_2) \ : \ \varphi(x) \geq 0 \ \forall x \in (x_1, \alpha)\}$.
Ta tìm được $(b_n)_n, b_n > 0, \ b_n \to 0$ và $\varphi(\overline{x} + b_n) < 0$.
Khi đó

$$g(\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} \Big[f(\overline{x} + b_n) - f(\overline{x} - b_n) \Big]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \Big[\varphi(\overline{x} + b_n) - \varphi(\overline{x} - b_n) \leq 0.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ f đơn điệu tăng trên (a, b).
* Trường hợp $g(x) \geq 0$ với mỗi $\varepsilon > 0$, xét $h(x) = f(x) + \varepsilon x$.
Theo chứng minh trên h là hàm đơn điệu tăng trên (a, b), do vậy f cũng là hàm đơn điệu tăng trên (a, b) vì $\varepsilon > 0$ tùy ý.

b) Nếu $g \equiv 0$ thì f vừa đơn điệu tăng vừa đơn điệu giảm do đó f là hàm hằng.

c) Gọi G là một nguyên hàm của g. Khi đó

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x-h)}{2h} = g(x).$$

Do vậy

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f-G)(x+h) - (f-G)(x-h)}{2h} = 0, \forall x \in (a, b).$$

Theo câu b) thì $f - G = const$.
Suy ra $f(x) = G(x) + c, \forall x \in (a, b)$.
Như vậy f là hàm có đạo hàm liên tục trên (a, b).

Bài 2.30. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[0, +\infty)$ sao cho

$$f(0) = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Chứng minh rằng phương trình $f''(x) = 0$ có nghiệm.

Bài 2.31. Giả sử f và g là các hàm khả vi trên $[a, b]$, trong đó $g(x) \neq 0$ và $g'(x) \neq 0$ với mỗi $x \in [a, b]$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{1}{g(b) - g(a)} \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = \frac{1}{g'(c)} \begin{vmatrix} f(c) & g(c) \\ f'(c) & g'(c). \end{vmatrix}$$

Hướng dẫn:
đặt $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \ \varphi(x) = \dfrac{1}{g(x)}, x \in [a, b]$.
Hãy áp dụng định lý Cauchy.

Bài 2.32. Cho f và g là các hàm xác định trên (a, b) sao cho với mỗi $x \in (a, b)$, tồn tại $\delta_x > 0$ để

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hg(x), 0 < h < \delta_x.$$

Chứng minh rằng nếu f khả vi thì $f''(x) = 0, \forall x \in (a, b)$.
Bạn đọc tự giải.

Bài 2.33. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[0, +\infty)$ thỏa mãn

$$f(0) = 0, f'(0) > 0 \text{ và } f''(x) \geq f(x), \forall x \geq 0.$$

Chứng minh rằng $f(x) > 0$ với mỗi $x > 0$.

Giải:

đặt $\varphi(x) = e^x(f'(x) - f(x))$. Ta có

$$\varphi'(x) = e^x(f''(x) - f(x)) \geq 0, \forall x \geq 0.$$

Do vậy φ là đơn điệu tăng trên $[0, +\infty)$. Mặt khác

$$\varphi(0) = f'(0) - f(0) > 0.$$

Suy ra $\varphi(x) > 0, \forall x \in [0, +\infty)$ nên $f'(x) > f(x), \forall x \in [0, +\infty)$.
Lặp lại lập luận tương tự với $\Psi(x) = e^{-x}f(x)$ ta suy ra

$$f(x) > 0, \forall x > 0.$$

Bài 2.34. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[0, +\infty)$ sao cho $f > 0,\ f' \leq 0$ và f'' bị chặn trên $[0, +\infty)$. Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0.$$

Giải:

Từ giả thiết suy ra tồn tại giới hạn $l = \lim_{x\to\infty} f(x)$.
Không mất tính tổng quát giả sử $l = 0$ (nếu không ta đặt hàm $\varphi(x) = f(x) - l$). Với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $A > 0$ sao cho

$$|f(x)| < \varepsilon^2, \forall x > A.$$

đặt $M = \sup_{x\geq 0} |f''(x)|$.
Với mỗi $x > A$, tồn tại $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$f(x+\varepsilon) - f(x) - f'(x)\varepsilon = \frac{1}{2}f''(x+\theta\varepsilon)\varepsilon^2.$$

Do đó

$$\begin{aligned}|f'(x)| &\leq \frac{|f(x+\varepsilon)| + |f(x)|}{\varepsilon} + \frac{1}{2}M.\varepsilon \\ &\leq (2 + \frac{1}{2}M)\varepsilon.\end{aligned}$$

Vậy $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Bài 2.35. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[a, b]$ sao cho $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f''(c) = f(c)$.

Hướng dẫn:

Xét hàm $\varphi(x) = e^{-x}(f(x) + f'(x)]$. áp dụng định lý Rolle.

Bài 2.36. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[a, b]$ và trên đoạn này f có không ít hơn ba không điểm khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(c) + f''(c) = 2f'(c).$$

Hướng dẫn:

đặt $\varphi(x) = e^{-x}f(x)$.

áp dụng định lý Rolle ta tìm được $c_1, c_2 \in (a,b)$ sao cho $f'(c_1) = f(c_1), f'(c_2) = f(c_2),\ c_1 \neq c_2$.

Lại đặt $\Psi(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$ rồi áp dụng định lý Rolle ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2.37. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp n trên $[0,1]$, $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ là các số khác nhau thuộc $[0,1]$. Chứng minh

$$\Big|\sum_{k=1}^{n+1} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_{n+1})}\Big| \leq \frac{1}{n!} \sup_{x\in[0,1]} |f^{(n)}(x)|$$

Giải:đặt

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f(x_k).\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+1}(x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+1}(x_k - x_j)}.$$

Ta có $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \cdots = \varphi(x_{n+1}) = 0$.

Do đó tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $\varphi^{(n)}(c) = 0$, tức là

$$f^{(n)}(c) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n! f(x_k)}{(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_{n+1})} = 0.$$

Suy ra

$$\Big|\sum_{k=1}^{n+1} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_{n+1})}\Big| \leq \frac{1}{n!} \max_{x\in[0,1]} \Big|f^{(n)}(x)\Big|.$$

Bài 2.38. Cho f là hàm khả vi cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - |x|) = 0; \quad f(0) \leq 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại x_o sao cho $f''(x_o) = 0$.

Lời giải:

Từ giả thiết suy ra

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1; \ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1; \ \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

Rõ ràng f' là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Th1: Nếu f' không phải là đơn ánh trên $\mathbb{R}$ nghĩa là tồn tại $x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq x_2$ và $f'(x_1) = f'(x_2)$, thì theo định lý Rolle, tồn tại x_o sao cho $f''(x_o) = 0$.

Th2: Nếu f' là đơn ánh khi đó f' là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Do đó tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$, và

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1; \ \lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1.$$

Vậy f' là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ và $-1 < f'(x) < 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

đặt $\varphi(x) = x - f(x)$. Ta có $\varphi'(x) = 1 - f'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(0) = -f(0) \geq 0$.
Vậy $x - f(x) \not\longrightarrow 0 \quad (x \to +\infty)$.
Như vậy trường hợp này không thể xảy ra.

Bài 2.39. Giả sử f là hàm khả vi liên tục đến cấp 3 trên $[0, +\infty),\ f(x) > 0, f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$ với mỗi $x \in [0, +\infty)$. Chứng minh rằng nếu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x).f'''(x)}{(f''(x))^2} = c,\ c < 2$$

thì

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x).f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{1}{2-c}.$$

Hướng dẫn:

Xét hàm $\varphi(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$.
Trước hết chứng minh $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi'(x) = 0$. Do vậy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(f'(x))^2}{f''(x)} = +\infty.$$

Sau đó chứng minh $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.
áp dụng qui tắc L'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x).f''(x)}{(f'(x))^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\dfrac{(f'(x))^2}{f''(x)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2 - \dfrac{f'(x).f'''(x)}{(f''(x))^2}} = \frac{1}{2-c}.$$

Bài 2.40. Cho f là hàm khả vi đến cấp hai trên (a, b). Chứng minh rằng với mỗi $x \in (a, b)$ ta có

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

Giải:

Xét

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Ta có $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \dfrac{1}{2}f''(x)h^2 + o_1(h^2)$
$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \dfrac{1}{2}f''(x)h^2 + o_2(h^2)$.
Từ đó ta có

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x) + \lim_{h\to 0} \frac{o_1(h^2) + o_2(h^2)}{h^2}$$

$$= f''(x)$$

Bạn đọc tự kiểm chứng với $x = 0$ và

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, \; x \neq 0 \\ e, \; x = 0. \end{cases}$$

Ta có $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) + f(0-h) - 2f(0)}{h^2} = 0$ nhưng $f''(0)$ không tồn tại.

Bài 2.41. Cho f là hàm xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm mỗi cấp và

$$\left| f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x) \right| < \frac{1}{n^2}, \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n \to \infty} f^{(n)}(x) = ce^x, \; c = const.$

Hướng dẫn:

Dãy hàm $(f^{(n)}(x))_n$ hội tụ đều về hàm $g(x)$ trên $\mathbb{R}$. Dễ thấy rằng $g'(x) = g(x)$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$ từ đó suy ra $g(x) = ce^x, c = const.$

Bài 2.42. Cho $P(x)$ là một đa thức bậc n với hệ số thực sao cho $P(x)$ có n nghiệm phân biệt $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0.$$

Giải:

Theo giả thiết $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n), \; a \neq 0$. Do đó

$$P'(x) = P(x)\Big(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_n}\Big), \forall x \notin \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}.$$

Vì $P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_n)$ nên tồn tại các số $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ sao cho

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$$

$$P'(y_1) = P'(y_2) = \cdots = P'(y_{n-1}) = 0.$$

Ta lại có

$$P''(x) = P'(x).\Big(\frac{1}{x - y_1} + \frac{1}{x - y_2} + \cdots + \frac{1}{x - y_{n-1}}\Big), \; \forall x \notin \{y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}\},$$

và

$$0 = P'(y_k) = P(y_k).\Big(\frac{1}{y_k - x_1} + \frac{1}{y_k - x_2} + \cdots + \frac{1}{y_k - x_n}\Big), \; \forall k = \overline{1, n-1}.$$

Vì $P(y_k) \neq 0$ nên ta có

$$\frac{1}{y_k - x_1} + \frac{1}{y_k - x_2} + \cdots + \frac{1}{y_k - x_n} = 0, \; \forall x = \overline{1, n-1}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} &= \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\frac{1}{x_k - y_1} + \frac{1}{x_k - y_2} + \cdots + \frac{1}{x_k - y_{n-1}}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{y_k - x_j}\Big) = 0. \end{aligned}$$

Bài 2.43. Cho $P(x)$ là một đa thức bậc $n \geq 1$ thỏa mãn $P(x) = 0$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh

$$P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(n)}(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải:

Giả sử $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_n \neq 0)$.

Vì $P(x) \geq 0$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$ nên n chẵn và $a_n > 0$.

Xét hàm

$$F(x) = P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(n)}(x).$$

Vì F cũng là đa thức bậc n với hệ số của x^n là a_n nên $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = +\infty$.

Do đó tồn tại $x_o \in \mathbb{R}$ sao cho $F(x_o) = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} F(x)$.

Theo bổ đề Fermat $F'(x_o) = F(x_o) - P(x_o) = 0$.

Như vậy $F(x_o) = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} F(x) = P(x_o) \geq 0$,

Và $F(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 2.44. Cho f là một hàm liên tục trên $[a-h, a+h]$, khả vi trên $(a-h, a+h), h > 0$. Chứng minh rằng tồn tại $\theta \in (0,1)$ sao cho

$$f(a+h) - f(a-h) = h\Big(f'(a+\theta h) + f'(a-\theta h)\Big).$$

Giải:

đặt $\varphi(x) = f(a+x) - f(a-x), x \in [0,h]$. Ta có φ liên tục trên $[0,h]$ và khả vi trên $(0,h)$. Theo định lý Lagrange tồn tại $\theta \in (0,1)$ sao cho

$$\varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(\theta h).h$$

$$\Longleftrightarrow f'(a+h) - f(a-h) = \Big[f'(a+\theta h) + f'(a-\theta h)\Big]h$$

Bài 2.45. Tìm tất cả các hàm f khả vi liên tục đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ sao cho tồn tại $\theta \in (0,1)$ để

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h), \ \forall x, h \in \mathbb{R}.$$

Giải:

Với mỗi $x, h \in \mathbb{R}$ ta có $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h^2)$.

Vì vậy $h[f'(x+\theta h) - f'(x)] = o(h^2)$.

Suy ra $\dfrac{f'(x+\theta h) - f'(x)}{h} = \dfrac{o(h^2)}{h^2}, \ h \neq 0$.

Do đó bằng cách lấy giới hạn khi $h \to 0$ ta có $\theta f''(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy $f(x) = Ax + B$.

Bài 2.46. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[-2,2]$ sao cho

$$|f(x)| \leq 1, \ \forall x \in [-2,2], (f(0))^2 + (f'(0))^2 = 4.$$

Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in (-2,2)$ sao cho $f(x_o) + f''(x_o) = 0$.

Giải:

đặt $F(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$.

Ta có $F'(x) = 2f'(x)(f(x) + f''(x)), F(0) = 4$.

Theo định lý Lagrange, tồn tại $\theta \in (-2,0)$ sao cho

$$f(0) - f(-2) = f'(\theta_1)2.$$

Do đó $f'(\theta_1) \leq \frac{1}{2}(|f(0)| + |f(-2)|) \leq 1$

Tương tự tồn tại $\theta_2 \in (0, 2)$ sao cho $f'(\theta_2) \leq 1$. Suy ra

$$F(\theta_1) \leq 2 \text{ và } F(\theta_2) \leq 2.$$

Vì $F(0) = 4, F(\theta_1) \leq 2, F(\theta_2) \leq 2$, nên F phải đạt giá trị lớn nhất tại $x_o \in (\theta_1, \theta_2)$ và $F'(x_o) = 0$.

Nếu $f'(x_o) = 0$ thì $F(x_o) = (f(x_o))^2 \leq 1$, vô lý. Do vậy

$$f'(x_o) \neq 0 \text{ và } f(x_o) + f''(x_o) = 0.$$

Bài 2.47. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[a, b]$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

Giải:

Gọi A là hằng số sao cho: $\dfrac{f(a) + f(b)}{2} = f(\dfrac{a+b}{2}) + \dfrac{(b-a)^2}{8}.A.$

đặt $F(x) = \dfrac{f(a) + f(x)}{2} - f(\dfrac{a+x}{2}) - \dfrac{(x-a)^2}{8}.A.$

Ta có $F(a) = F(b) = 0$ do đó tồn tại $\theta \in (a, b)$ sao cho $F'(\theta) = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\Big[f'(\theta) - f'(\frac{a+\theta}{2})\Big] - \frac{\theta - a}{4} A = 0 \quad (*)$$

Lại áp dụng định lý Lagrange cho hàm f' trên $[\dfrac{a+\theta}{2}; \theta]$ ta tìm được $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(\theta) - f'(\frac{a+\theta}{2}) = f''(c).\frac{\theta - a}{2}.$$

Thay vào (*) ta có $f''(c) = A$.

Như vậy tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

Bài 2.48. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\dfrac{c}{3} = -\dfrac{2}{5}(\dfrac{a+b}{n+2})$.

Chứng minh rằng phương trình

$$a \sin^n x + b \cos^n x + c \sin x + c = 0$$

có nghiệm trong $(0, \dfrac{\pi}{2})$.

Hướng dẫn:

Xét hàm

$$\varphi(x) = \frac{a \sin^{n+2} x}{n+2} - b\frac{\cos^{n+2} x}{n+2} + \frac{c \sin^3 x}{3} + \frac{c \sin^2 x}{2}.$$

Chứng tỏ $\varphi(0) = \varphi(\dfrac{\pi}{2})$ rồi áp dụng định lý Rolle.

Bài 2.49. Cho phương trình $x^n = x + n$.

a) Chứng minh rằng với mỗi n, phương trình có duy nhất nghiệm $x_n > 0$.

b) Chứng minh dãy $(x_n)_n$ bị chặn và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n^{\frac{1}{n}}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Giải:

Xét hàm $f_n(x) = x^n - x - n$. Ta có $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1$.

$$f_n'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq (\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}$$

Ta có bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f_n(x) = 0$ có duy nhất nghiệm x_n với

$$x_n > (\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}.$$

b) Vì $f_n(1) = -n < 0$ nên $x_n > 1$.

Vì $f_n(2) = 2^n - 2 - n > 0$ nên $x_n < 2$.

Vậy $(x_n)_n$ bị chặn. Ta có $x_n^n = x_n + n$ nên

$$\frac{x_n^n}{n} = \frac{x_n + n}{n} \to 1 \ (n \to \infty).$$

Do đó $\dfrac{x_n}{n^{\frac{1}{n}}} \to 1 \ (n \to \infty)$.

Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Bài 2.50. Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục sao cho $f(0) = f(1) = 0$, f khả vi đến cấp hai trên $(0,1)$ và $f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 0 \ \forall x \in (0,1)$.

Chứng minh rằng $f(x) \leq 0$ với mỗi $x \in [0,1]$.

Giải:

Xét hàm $\varphi(x) = e^x.f(x)$. Khi đó

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \\ \varphi''(x) \geq 0, \ \forall x \in (0,1). \end{cases}$$

Nếu tồn tại $x_o \in (0,1)$ sao cho $\varphi(x_o) > 0$ thì gọi $c \in (0,1)$ thỏa mãn

$$\varphi(c) = \sup_{x\in[0,1]} \varphi(x) > 0.$$

Ta có $\varphi'(c) = 0$. Vì φ' là đơn điệu tăng trên $(0,1)$ nên

$$\begin{cases} \varphi'(x) \geq 0, \ \forall x \in (c,1) \\ \varphi'(x) \leq 0, \ \forall x \in (0,c). \end{cases}$$

Do vậy $0 = \varphi(0) \geq \varphi(c) > 0$. Mâu thuẫn này chứng tỏ

$$\varphi(x) \leq 0, \ \forall x \in [0,1].$$

Suy ra $f(x) \leq 0, \ \forall x \in [0,1]$.

Bài 2.51. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và $f''(x) \geq f(x)$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu tồn tại $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f(a) = f(b) = 0$ thì

$$f(x) \leq 0, \ \forall x \in [a,b].$$

Giải:

Giả sử tồn tại $x_o \in (a,b)$ sao cho $f(x_o) > 0$. Gọi $c \in (a,b)$ sao cho

$$f(c) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) > 0.$$

Ta có $f'(c) = 0$. Khi đó $f''(c) \geq f(c) > 0$.
Gọi $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ sao cho $c \in (\alpha,\beta)$ và $f''(x) > 0,\ \forall x \in [\alpha,\beta]$.
Khi đó f' là hàm đơn điệu tăng ngặt trên (α,β). Do $f'(c) = 0$ nên

$$\begin{cases} f'(x) < 0,\ \forall x \in (\alpha,c) \\ f'(x) > 0,\ \forall x \in (c,\beta). \end{cases}$$

Vì vậy $f(\alpha) > f(c) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.
Mâu thuẫn này chứng tỏ $f(x) \leq 0,\ \forall x \in [a,b]$

Bài 2.52. Cho K là một hằng số , f là hàm khả vi trên $[0,+\infty)$ sao cho

$$f'(x) \leq kf(x),\ \forall x \geq 0.$$

Chứng minh rằng $f(x) \leq e^{kx}f(0),\ \forall x \geq 0$.

Hướng dẫn:

Xét hàm $\varphi(x) = e^{-kx}f(x)$.

Chương III. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 3.1. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đặt

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt.$$

Chứng minh rằng nếu f là hàm chẵn thì F là hàm lẻ , nếu f là hàm lẻ thì F là hàm chẵn.

Giải:

Giả sử f là hàm chẵn

Bằng phép đổi biến $t = -u$,

ta có $F(-x) = \int\limits_0^{-x} f(t)dt = \int\limits_0^{x} f(-u)(-du) = -\int\limits_0^{x} f(t)dt = -F(x)$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$.

Vì vậy F là hàm lẻ . Trường hợp còn lại hoàn toàn tương tự.

Bài 3.2. Cho f là một hàm liên tục và nhận giá trị dương trên $[0, 1]$.

a) Chứng minh rằng

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)dx}{f(\sin x) + f(\cos x)} = \frac{\pi}{4}.$$

b) Tính các tích phân

$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{1 + e^{\cos 2x}}$; $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{1 + \sqrt{tgx}}$.

Giải:

a) Đặt

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx.$$

Bằng phép đổi biến $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ ta suy ra

$$I_1 = \int\limits_0^{\dfrac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx.$$

Do đó $2I_1 = J_1 + I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \dfrac{\pi}{2}$.Vì vậy $I_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

b) Ta có

$$\frac{1}{1 + e^{\cos 2x}} = \frac{1}{e^{\cos^2 x - \sin^2 x} + 1} = \frac{e^{\sin^2 x}}{e^{\sin^2 x} + e^{\cos^2 x}}.$$

Do đó $I_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

đây là trường hợp riêng của câu a) với $f(x) = e^{x^2}$.

Bài 3.3. Cho f là một hàm chẵn liên tục trên $[-a,a], a>0;$ g là một hàm liên tục nhận giá trị dương trên $[-a,a]$ và

$$g(-x)=\frac{1}{g(x)},\ \forall x\in[-a,a].$$

a) Chứng minh rằng

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)dx}{1+g(x)}=\int_{0}^{a}f(x)dx.$$

b) Tính

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1-x+\sqrt{x^2+1}}dx.$$

c) Tính

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{(1+x^2)(1+e^x)}.$$

Giải:

a) Đặt $x=-t$, ta có

$$I=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)dx}{1+g(x)}=\int_{-a}^{a}\frac{f(-t)dt}{1+g(-t)}$$
$$=\int_{-a}^{a}\frac{f(t)dt}{1+\dfrac{1}{g(t)}}=\int_{-a}^{a}\frac{f(t)g(t)dt}{1+g(t)}=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)g(x)dx}{1+g(x)}.$$

Vì vậy

$$I+I=2I=\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx.$$

Từ đó suy ra $I=\int\limits_0^a f(x)dx$.

b) Áp dụng câu a) với $g(x)=\sqrt{x^2+1}-x$. Dễ thấy

$$g(-x)=\sqrt{x^2+1}+x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{1}{g(x)},\ \forall x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$$

Bài 3.4. Cho f là hàm liên tục trên $[-a,a]$. Chứng minh rằng

a) $\int\limits_{-a}^{a}f(x^2)dx=2\int\limits_{0}^{a}f(x^2)dx.$

b) $\int\limits_{-a}^{a}xf(x^2)dx=0.$

Hướng dẫn:

a) Đặt $g(x)=f(x^2)$. Dễ thấy g là hàm chẵn trên $[-a,a]$.

b) Đặt $h(x) = xf(x^2)$. Dễ thấy h là hàm lẻ trên $[-a, a]$.

Bài 3.5. Cho f là hàm liên tục trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx.$

b) $\int\limits_0^{n\pi} f(\cos^2 x)dx = n\int\limits_0^{\pi} f(\cos^2 x)dx.$

(Bạn đọc tự giải)

Bài 3.6. Cho f là một hàm liên tục nhận giá trị dương và tuần hoàn với chu kỳ bằng 1 trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\frac{1}{n})}dx \geq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải: Ta có

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\frac{1}{n})}dx = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{f(x+\frac{1}{n})}dx + \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{f(x)}{f(x+\frac{1}{n})}dx + \cdots + \int\limits_{\frac{n-1}{n}}^{1} \frac{f(x)}{f(x+\frac{1}{n})}dx.$$

Trong mỗi tích phân

$$\int\limits_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{f(x)}{f(x+\frac{1}{n})}dx,\ 1 \leq i \leq n-1,$$

thực hiện phép đổi biến $x = t + \dfrac{i}{n}$, ta có

$$\int\limits_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{f(x)}{f(x+\frac{1}{n})}dx = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x+\frac{i}{n})}{f(x+\frac{i+1}{n})}dx.$$

Vì vậy

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\frac{1}{n})}dx = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{f(x+\frac{1}{n})}dx + \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x+\frac{1}{n})}{f(x+\frac{2}{n})}dx + \cdots + \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x+\frac{n-1}{n})}{f(x)}dx.$$

Bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta nhận được

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\frac{1}{n})}dx \geq n\int\limits_0^{\frac{1}{n}} dx = 1.$$

Bài 3.7. Cho f là một hàm khả vi liên tục trên $[a,b], f(a)=0$ và

$$0 \leq f'(x) \leq 1,\ \forall x \in [a,b].$$

Chứng minh rằng

a) $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \frac{1}{2}\Big[(f(b))^2 - (f(a))^2\Big]$.

b) $\int\limits_a^b (f(x))^3 dx \leq \Big(\int\limits_a^b f(x)dx\Big)^2$.

Giải:

a) Ta có f là hàm đơn điệu tăng trên $[a,b]$ và $f(x) \geq f(a) = 0,\ \forall x \in [a,b]$. Do đó :

$$f(x) \geq f(x).f'(x),\ \forall x \in [a,b].$$

Từ đây suy ra

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b f(x).f'(x)dx = \frac{1}{2}[f(x)]^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}\big[(f(b))^2 - (f(a))^2\big].$$

b) Xét hàm số

$$F(x) = (\int\limits_a^x f(t)dt)^2 - \int\limits_a^x (f(t))^3 dt,\ x \in [a,b].$$

Ta có

$F'(x) = 2.\int\limits_a^x f(t)dt.f(x) - (f(x))^3 = f(x)\Big[2\int\limits_a^x f(t)dt - (f(x))^2\Big]$.

Đặt $G(x) = 2\int\limits_0^x f(t)dt - (f(x))^2$. Ta có

$G'(x) = 2f(x) - 2f(x).f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$.

Do đó $G(x) \geq G(a) = 0,\ \forall x \in [a,b]$.

Từ đó suy ra $F'(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$. Như vậy $F(b) \geq F(a) = 0$.

Nghĩa là $\Big(\int\limits_a^b f(x)dx\Big)^2 \geq \int\limits_a^b (f(x))^3 dx$.

Bài 3.8. Cho $f \in C_{[a,b]};\ x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b], k_1, k_2, \cdots, k_n > 0$. Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in [a,b]$ sao cho

$k_1\int\limits_{x_o}^{x_1} f(x)dx + k_2\int\limits_{x_o}^{x_2} f(x)dx + \cdots + k_n\int\limits_{x_o}^{x_n} f(x)dx = 0.$

Giải: Xét hàm

$$\varphi(x) = k_1\int\limits_x^{x_1} f(t)dt + k_2\int\limits_x^{x_2} f(t)dt + \cdots + k_n\int\limits_x^{x_n} f(t)dt.$$

Ta dễ dàng kiểm tra được

$$k_1\varphi(x_1) + k_2\varphi(x_2) + \cdots + k_n\varphi(x_n) = 0.$$

Mặt khác φ là hàm liên tục trên $[a,b]$ và $k_i > 0$ với mọi $i = \overline{1,n}$, do đó tồn tại $x_o \in [a,b]$ sao cho $\varphi(x_o) = 0$, hay $k_1 \int\limits_{x_o}^{x_1} f(x)dx + k_2 \int\limits_{x_o}^{x_2} f(x)dx + \cdots + k_n \int\limits_{x_o}^{x_n} f(x)dx = 0.$

Bài 3.9. Chứng minh rằng với mọi $a, b,\ 0 < a < b$ thì

a) $\left| \int\limits_a^{a+1} \sin x^2 dx \right| \le \dfrac{1}{a},$

b) $\left| \int\limits_a^{b} \dfrac{\sin x}{x} dx \right| \le \dfrac{2}{a}.$

Giải:

a) Xét tích phân $I = \int\limits_a^{a+1} \sin x^2 dx$. Bằng phép đổi biến $t = x^2$, ta có

$$I = \int\limits_{a^2}^{(a+1)^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt.$$

Đặt $u = \dfrac{1}{2\sqrt{t}},\ du = -\dfrac{1}{2t}.\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$ và chọn $v = -\cos t$.Ta có

$$\begin{aligned}
|I| &= \left| \frac{-\cos t}{2\sqrt{t}} \Big|_{a^2}^{(a+1)^2} - \int\limits_{a^2}^{(a+1)^2} \frac{\cos t dt}{4t\sqrt{t}} \right| \\
&\le \frac{1}{2(a+1)} + \frac{1}{2a} + \left| \int\limits_{a^2}^{(a+1)^2} \frac{\cos t dt}{4t\sqrt{t}} \right| \\
&\le \frac{1}{2(a+1)} + \frac{1}{2a} + \int\limits_{a^2}^{(a+1)^2} \frac{dt}{4t\sqrt{t}} = \frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

b) Đặt $u = \dfrac{1}{x},\ du = -\dfrac{1}{x^2}dx$ và chọn $v = -cosx$. Ta có

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| &= \left| \frac{-\cos x}{x} \Big|_a^b - \int\limits_a^b \frac{\cos x dx}{x^2} \right| \\
&\le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \int\limits_a^b \frac{|\cos x| dx}{x^2} \\
&\le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \int\limits_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{a}.
\end{aligned}$$

Bài 3.10. Tìm tất cả các hàm f liên tục trên $[0,1]$ sao cho

$$\int\limits_0^x f(t)dt = \int\limits_x^1 f(t)dt.$$

Hướng dẫn: Lấy đạo hàm hai vế.

Bài 3.11. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$. Chứng minh rằng

a) $\int\limits_a^b xf(x).f'(x)dx = -\dfrac{1}{2}\int\limits_a^b [f(x)]^2dx.$

b) Giả sử $\int\limits_a^b [f(x)]^2dx = 1$. Hãy chứng minh

$$\int\limits_a^b [f'(x)]^2dx.\int\limits_a^b [xf(x)]^2dx \geq \frac{1}{4}.$$

Giải:

a) Đặt $u = x,\ dv = f(x).f'(x)dx$ và chọn $v = \dfrac{1}{2}(f(x))^2$. Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b xf(x).f'(x)dx &= \frac{1}{2}x[f(x)]^2\Big|_a^b - \frac{1}{2}\int\limits_a^b [f(x)]^2dx\\ &= -\frac{1}{2}\int\limits_a^b [f(x)]^2dx.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b [f'(x)]^2dx.\int\limits_a^b [xf(x)]^2dx &\geq \Big(\int\limits_a^b xf(x).f'(x)dx\Big)^2\\ &= \frac{1}{4}\int\limits_a^b [f(x)]^2dx = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Bài 3.12. Cho f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đặt

$$f_1(x) = \int\limits_0^x f(t)dt, \cdots, f_n(x) = \int\limits_0^x f_{n-1}(t)dt.$$

Chứng minh rằng $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{n!}\int\limits_0^x (x-t)^n f(t)dt,\ n \geq 1.$

(Bạn đọc tự giải).

Bài 3.13. Cho f là hàm liên tục trên $[0, \pi]$ sao cho

$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx = \int_0^\pi f(x)\cos x dx = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt trong $(0, \pi)$.

Giải:

Giả sử rằng f có không quá một nghiệm trên $(0, \pi)$.

Th1: f vô nghiệm trên $(0, \pi)$. Do tính liên tục của f ta suy ra f không đổi dấu trên $(0, \pi)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $f(x) > 0$ với mọi $x \in (0, \pi)$. Khi đó $\int_0^\pi f(x)\sin x dx > 0$, mâu thuẫn.

Th2: f có duy nhất nghiệm $x_o \in (0, \pi)$. Dễ thấy rằng hàm $g(x) = f(x)\sin(x - x_o)$ không đổi dấu trên $(0, \pi)$. Do đó

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x - x_o)dx > 0.$$

Mặt khác từ giả thiết đã cho ta có

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x - x_o)dx = \cos x_o \int_0^\pi f(x)\sin x dx - \sin x_o \int_0^\pi f(x)\cos x dx = 0$$

Mâu thuẫn trên chứng tỏ f có ít nhất hai nghiệm phân biệt trên $(0, \pi)$.

Bài 3.14. Cho $I_k = [a_k, b_k],\ k = 1, 2, \cdots, n$ là n đoạn rời nhau từng đôi một.

a) Giả sử $P(x)$ là một đa thức bậc nhỏ hơn n thỏa mãn

$$\int_{a_k}^{b_k} P(x)dx = 0,\ \forall k = 1, 2, \cdots, n.$$

Chứng minh rằng $P(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng tồn tại một đa thức khác không bậc n thỏa mãn điều kiện trên.

Hướng dẫn:

a) Dùng định lý giá trị trung bình của tích phân.

b) Bạn đọc tự giải.

Bài 3.15. Cho f là hàm khả vi trên $[-1, 1]$ sao cho

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (-1, 1)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Giải:

Theo định lý giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $x_1 \in [-1, 0]$,

$x_2 \in [0,1]$ sao cho
$\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx = f(x_1)$, và $\int\limits_{0}^{1} f(x)dx = f(x_2)$.

* Nếu $x_1 \neq 0$ hoặc $x_2 \neq 0$ thì $x_1 \neq x_2$. Theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (x_1, x_2) \subset (-1,1)$ sao cho $f'(c) = 0$.

* Nếu $x_1 = x_2 = 0$, thì

$$\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx = f(0) = \int\limits_{0}^{1} f(x)dx.$$

Nếu $f(x) \neq f(0),\ \forall x \in (0,1]$ thì $g(x) = f(x) - f(0) \neq 0$ với mọi $x \in (0,1]$. Vì vậy $g(x)$ không đổi dấu trên $(0,1]$ và

$$\int\limits_{0}^{1} g(x)dx = \int\limits_{0}^{1} g(x)dx - f(0) \neq 0.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ tồn tại $x_1 \in (0,1]$ sao cho

$$f(x_1) = f(0).$$

Lại áp dụng định lý Rolle ta có điều cần chứng minh.

Bài 3.16. Cho f là hàm liên tục trên $[0,1]$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0,1]$ sao cho

$$\int\limits_{0}^{1} f(x)x^2dx = \frac{1}{3}f(c).$$

Giải:

Do f là hàm liên tục trên $[0,1]$ nên tồn tại $x_1, x_2 \in [0,1]$

$$f(x_1) = \min_{x\in[0,1]} f(x),\ f(x_2) = \max_{x\in[0,1]} f(x).$$

Do đó

$$x^2f(x_1) \leq x^2f(x) \leq x^2f(x_2), \forall x \in [0,1].$$

Suy ra

$$\frac{1}{3}f(x_1) \leq \int\limits_{0}^{1} x^2f(x)dx \leq \frac{1}{3}f(x_2).$$

$$\Longleftrightarrow f(x_1) \leq 3\int\limits_{0}^{1} x^2f(x)dx \leq f(x_2).$$

Theo định lý giá trị trung gian của hàm liên tục, tồn tại $c \in [0,1]$ để

$$f(c) = 3\int\limits_{0}^{1} x^2f(x)dx.$$

Bài 3.17. Cho $\alpha > 0,\ f$ liên tục $[0,1],\ f(0) > 0$, và

$$\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{\alpha+1}.$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x^\alpha$ có nghiệm trong $(0,1)$.

Lời giải:

Xét hàm $\varphi(x) = f(x) - x^\alpha, \quad x \in [0,1]$. Ta có $\varphi(0) = f(0) > 0$. Mặt khác

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{\alpha+1} < 0.$$

Vì vậy tồn tại $x_o \in [0,1]$ sao cho $\int_0^1 \varphi(x)dx = \varphi(x_o) < 0$.

Do tính liên tục của φ và $\varphi(0).\varphi(x_o) < 0$ ta suy ra phương trình $\varphi(x) = 0$ có nghiệm trong $(0,1)$.

Bài 3.18. Cho f là hàm liên tục trên $[0,n]$ và $\displaystyle\int_0^n f(x)dx = 0,\ (n \in \mathbb{N})$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0, n-1]$ sao cho

$$\int_0^c f(x)dx = \int_0^{c+1} f(x)dx.$$

Giải:

Xét hàm

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_0^{x+1} f(t)dt = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

Rõ ràng φ liên tục trên $[0, n-1]$ và

$$\varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi(n-1) = 0.$$

Ta dễ dàng suy ra tồn tại $c \in [0, n-1]$ để $\varphi(c) = 0$.

Bài 3.19. Cho f là hàm liên tục trên $[0,1]$ thoả mãn

$\int_0^1 x^k f(x)dx = 0,\ \forall k = 1, \cdots, n-1, \int_0^1 x^n f(x)dx = 1$.

Chứng minh rằng tồn tại $x_o \in [0,1]$ sao cho $|f(x_o)| \geq 2^n(n+1)$.

Lời giải:

Giả sử rằng $|f(x)| < 2^n(n+1), \quad \forall x \in [0,1]$

Ta có

$$\int_0^1 |x - \frac{1}{2}|^n dx = \frac{1}{2^n(n+1)}.$$

Vì vậy

$$\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^n f(x)dx \le \int_0^1 |x-\frac{1}{2}|^n |f(x)|dx$$

$$< \int_0^1 |x-\frac{1}{2}|^n .2^n(n+1)dx = 1.$$

Mặt khác

$$\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^n f(x)dx = \int_0^1 x^n f(x)dx = 1.$$

Mâu thuẫn trên chứng tỏ rằng tồn tại $x_o \in [0,1]$ sao cho

$$|f(x_o)| \ge 2^n(n+1).$$

Bài 3.20. Cho f là hàm liên tục trên $[0,1]$ thoả mãn

$$\int_a^b |f(x)|dx = 0.$$

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \in [a,b]$.

Lời giải:

Giả sử tồn tại $x_o \in [a,b]$ sao cho $f(x_o) \neq 0$. Ta có $|f(x_o)| > 0$.
Do tính liên tục của f, tồn tại $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ và $\varepsilon > 0$ sao cho

$$|f(x)| \ge \varepsilon, \quad \forall x \in [\alpha,\beta].$$

Khi đó:

$$\int_a^b |f(x)|dx \ge \int_\alpha^\beta f(x)dx \ge \varepsilon(b-a) > 0.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ $f(x) = 0,\ \forall x \in [a,b]$.

Bài 3.21. Cho f là hàm khả tích trên $[a,b]$ và $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$.

Chứng minh rằng tồn tại $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ sao cho $f(x) > 0, \quad \forall x \in [\alpha,\beta]$.

Lời giải:

Giả sử rằng với mọi đoạn $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, tồn tại $x_o \in [\alpha,\beta]$ sao cho $f(x_o) \le 0$.
Đặt $I = \int\limits_a^b f(x)dx > 0$. Xét phân hoạch $[a,b]$ bởi

$$x_o = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,\ x_i = a + i.\frac{b-a}{n}, i = \overline{0,n}.$$

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = I > 0$ với $\xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$.

Do vậy, tồn tại n_o sao cho với mọi $n \geq n_o$ thì

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq \frac{1}{2} > 0.$$

Chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sao cho $f(\xi_i) \leq 0$ ta dẫn đến điều mâu thuẫn.

Bài 3.22. Cho f, g là các hàm liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng

a) $\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int\limits_a^b (f(x))^2 dx. \int\limits_a^b (g(x))^2 dx.$

b) $\int\limits_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx \leq \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}.$

c) Nếu $f(x) > 0,\ \forall x \in [a, b]$, thì $\displaystyle\int_a^b f(x)dx. \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq (b-a)^2.$

Giải:

a) Bạn đọc tự giải

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx &= \int_0^1 \sqrt{x^n}.\sqrt{x^n(1-x)}dx \\
&\leq \Big(\int_0^1 x^n dx\Big)^{\frac{1}{2}}.\Big(\int_0^1 x^n(1-x)dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big(\int_0^1 x^n dx - \int_0^1 x^{n+1}dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.\frac{1}{\sqrt{n+1}.\sqrt{n+2}} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}
\end{aligned}$$

Bài 3.23. Cho f liên tục trên $[0, 1],\ 0 \leq f(x) \leq 1$ với mọi $x \in [0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 f(x)dx \leq \Big(\int_0^1 f(x^2)dx\Big)^2.$$

Lời giải: Xét

$$\varphi(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt - \Big(\int_0^x f(t^2)dt\Big)^2,\ x \in [0, 1].$$

$$\varphi'(x) = f(x^2).2x - 2\int\limits_0^x f(t^2)dt.f(x^2)$$
$$= 2.f(x^2)[x - \int\limits_0^x f(t^2)dt].$$

Theo định lý giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $\xi \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 2f(x^2)\big[x - xf(\xi)\big]\\ &= 2xf(x^2)\big[1 - f(\xi)\big] \geq 0,\ \forall x \in [0,1].\end{aligned}$$

Vậy φ là đơn điệu tăng trên $[0,1]$. Do vậy $\varphi(1) \geq \varphi(0) = 0$.

Ta suy ra $\int\limits_0^1 f(t)dt \geq \Big(\int\limits_0^1 f(t^2)dt\Big)^2$.

Bài 3.24. Cho f là hàm liên tục không âm trên $[0,1]$. Chứng minh rằng $\sqrt{1 + \big(\int\limits_0^1 f(x)dx\big)^2} \leq \int\limits_0^1 \sqrt{1 + (f(x))^2}dx \leq 1 + \int\limits_0^1 f(x)dx.$

Lời giải:

* Ta luôn có $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [0,1]$. Do đó

$$\sqrt{1 + (f(x))^2} \leq 1 + f(x),\ \forall x \in [0,1].$$

Vì vậy

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1 + (f(x))^2}dx \leq 1 + \int\limits_0^1 f(x)dx.$$

* Bất đẳng thức còn lại tương đương với

$$1 \leq \Big(\int\limits_0^1 \sqrt{1 + (f(x))^2}dx\Big)^2 - \Big(\int\limits_0^1 f(x)dx\Big)^2$$
$$\Longleftrightarrow 1 \leq \int\limits_0^1 \Big(\sqrt{1 + (f(x))^2} + f(x)\Big)dx.\int\limits_0^1 \Big(\sqrt{1 + (f(x))^2} - f(x)\Big)dx$$
$$\Longleftrightarrow 1 \leq \int\limits_0^1 \Big(\sqrt{1 + (f(x))^2} + f(x)\Big)dx.\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + (f(x))^2} + f(x)}.$$

Bất đẳng thức cuối luôn luôn thoả mãn theo Bài 3.23.

Bài 3.25. Cho f là một hàm liên tục trên $[0,b]$, và $0 < a < b, f$ nghịch biến trên $[0,b]$. Chứng minh rằng

$$b\int_0^a f(x)dx \geq a\int_0^b f(x)dx.$$

Lời giải:

$$b\int_0^a f(x)dx \geq a\int_0^a f(x)dx + a\int_a^b f(x)dx$$

$\iff (b-a)\int\limits_0^a f(x)dx \geq a\int\limits_0^a f(x)dx.$

Theo định lý giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $\xi_1, \xi_2 : 0 \leq \xi_1 \leq a \leq \xi_2 \leq b$ và

$$(b-a)\int_0^a f(x)dx = a(b-a)f(\xi_1)$$

$$a\int_a^b f(x)dx = a(b-a)f(\xi_2).$$

Vì $f(\xi_1) \geq f(\xi_2)$ nên

$$(b-a)\int_0^a f(x)dx \geq a\int_a^b f(x)dx.$$

Bài 3.26. Cho $a, b, c \in \mathbb{R},\ a < b < c$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)dx \leq \max\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \frac{1}{c-b}\int_b^c f(x)dx\},$$

với f liên tục trên $[a, b]$.

Lời giải:

Giả sử

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c-a}\displaystyle\int_a^c f(x)dx > \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx \\ \dfrac{1}{c-a}\displaystyle\int_a^c f(x)dx > \dfrac{1}{c-b}\displaystyle\int_b^c f(x)dx \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \dfrac{1}{c-a}\displaystyle\int_b^c f(x)dx > \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx \\ \dfrac{1}{c-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \dfrac{1}{c-a}\displaystyle\int_b^c f(x)dx > \dfrac{1}{c-b}\displaystyle\int_b^c f(x)dx \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{1}{c-a}\displaystyle\int_b^c f(x)dx > \dfrac{c-b}{(b-a)(c-a)}\displaystyle\int_a^b f(x)dx \\ \dfrac{1}{c-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx > \dfrac{b-a}{(c-b)(c-a)}\displaystyle\int_b^c f(x)dx \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \displaystyle\int_b^c f(x)dx > \dfrac{c-b}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx \\ \displaystyle\int_a^b f(x)dx > \dfrac{b-a}{c-b}\displaystyle\int_b^c f(x)dx \end{cases}.$$

Suy ra $\displaystyle\int_b^c f(x)dx > \frac{c-b}{b-a}\frac{b-a}{c-b}\int_b^c f(x)dx$, vô lý.

Bài 3.27. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[a,b]$, $f(a)=0$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b |f(x).f'(x)|dx \le \frac{(b-a)}{2}\int_a^b (f'(x))^2dx.$$

Lời giải:

Với mọi $x\in[a,b]$, ta có $f(x)=\int_a^x f'(t)dt$.

Do đó $|f(x).f'(x)| \le \int_a^x |f'(t)|dt.|f'(x)|$.

Suy ra

$$\int_a^b |f(x).f'(x)|dx \le \int_a^b \big(\int_a^x |f'(t)|dt\big)|f'(x)|dx.$$

Ta có: $\big(\int_a^x |f'(t)|dt\big)' = |f'(x)|$. Do vậy

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(\int_a^x |f'(t)dt\big).|f'(x)|dx &= \frac{1}{2}\big(\int_a^x |f'(t)|dt\big)^2\Big|_a^b \\ &= \frac{1}{2}\big(\int_a^b |f'(x)|dx\big)^2 \\ &\le \frac{1}{2}(b-a).\int_a^b |f'(x)|^2dx.\end{aligned}$$

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 3.28. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[a, b],\ f(a) = 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |f(x)|dx \le \int\limits_a^b |f'(x)|dx.$$

Giải: Ta có

$$|f(x)| = |f(x) - f(a)| = \Big|\int\limits_a^x f'(t)dt\Big|$$

$$\le \int\limits_a^x |f'(t)|dt \le \int\limits_a^b |f'(t)|dt.$$

Do đó

$$\int\limits_a^b |f(x)|dx \le (b-a)\int\limits_a^b |f'(x)|dx.$$

Bài 3.29. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng

$$\int\limits_a^b \big(f(x) - f(a)\big)^2 dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int\limits_a^b (f'(x))^2 dx.$$

Lời giải: Ta có

$$\big(f(x) - f(a)\big)^2 = \Big(\int\limits_a^x f'(t)dt\Big)^2 \le \int\limits_a^x (f'(t))^2 dt.\int\limits_a^x 1^2 dt$$

$$\le (x-a)\int\limits_a^x (f'(t))^2 dt$$

$$\le (x-a)\int\limits_a^b (f'(x))^2 dx.$$

Do đó

$$\int\limits_a^b \big(f(x) - f(a)\big)^2 dx \le \int\limits_a^b (x-a)dx.\int\limits_a^b (f'(x))^2 dx$$

$$\le \frac{(b-a)^2}{2}\int\limits_a^b (f'(x))^2 dx.$$

Bài 3.30. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[0, 1],\ f(0) = 0$. Chứng minh rằng

$$\sup_{0 \le x 1} |f(x)| \le \int\limits_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

Bài 3.31. Cho f liên tục trên $[a,b]$ và $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$ với mọi hàm g khả vi liên tục trên $[a,b]$ thoả mãn $g(a) = g(b) = 0$.

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \in [a,b]$.

Lời giải:

Giả sử rằng tồn tại $x_o \in [a,b]$ sao cho $f(x_o) > 0$.

Khi đó tồn tại $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ và $\varepsilon > 0$ sao cho $f(x) > \varepsilon > 0,\ \forall x \in [\alpha,\beta]$. Đặt

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x \in [a,\alpha] \\ (x-\alpha)^2(x-\beta)^2,\ x \in (\alpha,\beta) \\ 0, x \in [\beta, b]. \end{cases}$$

Khi đó g khả vi liên tục trên $[a,b]$ và

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \geq \varepsilon \int\limits_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^2 dx > 0.$$

(qui ước $[a,\alpha] = \{a\}$ nếu $\alpha = a$, $[\beta,b] = \{b\}$ nếu $\beta = b$.)

Bài 3.32. Cho f, g là các hàm liên tục đơn điệu cùng loại trên $[a,b]$. Chứng minh rằng

$$\int\limits_a^b f(x)g(a+b-x)dx \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx.\int\limits_a^b g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx.$$

Hướng dẫn:

Theo định lý giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $x_o \in [a,b]$:

$$\int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b g(a+b-x)dx = g(a+b-x_o).$$

Sử dụng

$(f(x) - f(x_o))\Big(g(a+b-x) - g(a+b-x_o)\Big) \leq 0,\ \forall x \in [a,b]$ để suy ra phần đầu của bất đẳng thức.

Bài 3.33. Cho f là hàm khả vi liên tục đến cấp hai trên $[0,2]$. Chứng minh rằng

$$\int\limits_0^2 (f''(x))^2 dx \geq \frac{3}{2}\big(f(0) - 2f(1) + f(2)\big)^2.$$

Lời giải:

$$\int\limits_0^1 (f''(x))^2 dx = 3\int\limits_0^1 x^2 dx.\int\limits_0^1 (f''(x))^2 dx \geq 3(\int\limits_0^1 x^2 f''(x)dx)^2$$
$$= 3\big(f'(1) + f(0) - f(1)\big)^2.$$

$$\int\limits_1^2 (f''(x))^2 dx = 3\int\limits_1^2 (x-2)^2 dx.\int\limits_1^2 (f''(x))^2 dx \geq 3\Big(\int\limits_1^2 (x-2)f''(x)dx\Big)^2$$

$$= 3\big(- f'(1) + f(2) - f(1)\big)^2.$$

Do đó

$$\int\limits_0^2 (f''(x))^2 dx \geq 3\Big[\big(f'(1) + f(0) - f(1)\big)^2 + \big(- f'(1) + f(2) - f(1)\big)^2\Big]$$

$$\geq \frac{3}{2}\big(f(0) - 2f(1) + f(2)\big)^2.$$

Bài 3.34. Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ g : [0, 1] \to [0, 1]$ là các hàm liên tục, f đơn điệu giảm. Đặt $a = \int\limits_0^1 g(x)dx$.

Chứng minh rằng $\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx \leq \int\limits_0^a f(x)dx$.

Lời giải:

Đặt $\varphi(x) = \int\limits_0^x g(t)dt$ và $F(x) = \int\limits_0^x f(t)g(t)dt - \int\limits_0^{\varphi(x)} f(t)dt$.

Lúc đó

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x)g(x) - f(\varphi(x).\varphi'(x) \\ &= f(x).g(x) - f(\varphi(x)).g(x) \\ &= \Big[f(x) - f(\varphi(x))\Big]g(x), \quad \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Ta có

$$\varphi(x) = \int\limits_0^x g(t)dt = g(\xi)x \leq x,\ \forall x \in [0, 1].$$

Do đó $g(\varphi(x)) \geq g(x),\ \forall x \in [0, 1]$.
Từ đó suy ra $F'(x) \leq 0,\ \forall x \in [0, 1]$.
Vì vậy $F(1) \leq F(0) = 0$ hay

$$\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx \leq \int\limits_0^a f(x)dx.$$

Bài 3.35. Cho f, g là các hàm liên tục trên $[a, b]$, f đơn điệu tăng và $0 \leq g(x) \leq 1$ với mọi $x \in [a, b]$. Đặt $h(x) = \int\limits_a^x g(t)dt$.

a) Hãy so sánh

$F(x) = \int\limits_a^x f(t)g(t)dt$ và $G(x) = \int\limits_a^{a+h(x)} f(t)dt$.

b) Chứng minh với $l = \int\limits_a^b g(x)dx$, ta có

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \geq \int\limits_a^{a+l} f(x)dx.$$

Hướng dẫn: Tương tự Bài tập 3.34.

Bài 3.36. Cho $a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0$ f là hàm liên tục trên $[0, +\infty]$, $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [0, +\infty)$ và

$$f(x) \leq a + b\int\limits_0^x f(t)dt, \ \forall x \geq 0.$$

Chứng minh rằng $f(x) \leq ae^{bx}, \ \forall x \geq 0$. **Lời giải:**

+ Th1: $b = 0$. Ta dễ dàng suy ra kết quả.

+ Th 2: $b > 0$. Xét $h(x) = e^{-bx}\big(\int\limits_0^x f(t)dt + \frac{a}{b}\big)$. Ta có

$$h'(x) = e^{-bx}(f(x) - a - b\int\limits_a^x f(t)dt) \leq 0, \ \forall x \geq 0.$$

Do đó h là hàm giảm trên $[0, +\infty)$ và $h(x) \leq h(0), \ \forall x \in [0, +\infty)$.

Suy ra: $e^{-bx}\Big(\int\limits_a^x f(t)dt + \dfrac{a}{b}\Big) \leq \dfrac{a}{b}, \ \forall x \geq 0$, hay

$a + b\int\limits_a^x f(t)dt \leq ae^{bx} \ \ \forall x \geq 0.$

Vì vậy $f(x) \leq ae^{bx}, \ \forall x \geq 0$.

Bài 3.37. Cho f là một hàm liên tục trên $[a, b]$ và

$$\Big|\int\limits_a^b f(x)dx\Big| = \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Chứng minh rằng f không đổi dấu trên $[a, b]$. **Lời giải:**

Từ giả thiết suy ra

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b |f(x)|dx \text{ hay } \int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Th1: Giả sử $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b |f(x)|dx$. Khi đó

$$\int\limits_a^b (|f(x)| - f(x))dx = 0$$

Đặt $\varphi(x) = |f(x)| - f(x)$. Ta có φ liên tục trên $[a, b]$, $\varphi(x) \geq 0, \ \forall x \in [a, b]$, và $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = 0$.

Do vậy: $\varphi(x) = 0, \ \forall x \in [a, b]$ hay $|f(x)| = f(x), \ \forall x \in [a, b]$.

Vậy$f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a, b]$.

Th2: Giả sử $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_a^b |f(x)|dx$. Hoàn toàn tương tự ta suy ra

$$f(x) \leq 0,\ \forall x \in [a,b].$$

Bài 3.38. Cho f là một hàm liên tục đơn điệu tăng trên $[a,b]$. Đặt

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Chứng minh rằng
(*) $F(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha F(x) + (1-\alpha)F(y),\ \forall x,y \in [a,b], \alpha \in (0,1)$.

Lời giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \leq y$. Khi đó

$$x \leq \alpha x + (1-\alpha)y \leq y.$$

(*) được viết lại như sau

$$\int\limits_a^{\alpha x+(1-\alpha)y} f(t)dt \leq \alpha \int\limits_a^x f(t)dt + (1-\alpha)\int\limits_a^y f(t)dt.$$

$$\Longleftrightarrow (**)\quad \alpha \int\limits_a^{\alpha x+(1-\alpha)y} f(t)dt \leq (1-\alpha)\int\limits_{\alpha x+(1-\alpha)y}^{y} f(t)dt.$$

Kết quả trên có được bằng cách thay $\int\limits_a^y f(t)dt$ bởi

$$\int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^{\alpha x+(1-\alpha)y} f(t)dt + \int\limits_{\alpha x+(1-\alpha)y}^{y} f(t)dt.$$

Theo định lý giá trị trung bình của tích phân, tồn tại ξ_1, ξ_2 sao cho

$$x \leq \xi_1 \leq \alpha x + (1-\alpha)y \leq \xi_2 \leq y$$

và

$$VT(**) = \alpha.f(\xi_1).(1-\alpha)(y-x)$$
$$VP(**) = \alpha(1-\alpha)f(\xi_2)(y-x).$$

Vì $f(\xi_1) \leq f(\xi_2)$ nên (**) luôn thoả mãn.

Bài 3.39. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[0,1]$ sao cho

$$f(0) = f(1) = 0, \int\limits_0^1 |f'(x)|dx = 1.$$

Chứng minh rằng $|f(x)| \leq \frac{1}{2},\ \forall x \in [0,1]$.

Hướng dẫn: Sử dụng

$$|f(x)| = |\int\limits_0^x f(t)dt| \leq \int\limits_0^x |f'(t)|dt$$

$$|f(x)| = \Big|\int_x^1 f(t)dt\Big| \leq \int_x^1 \big|f'(t)\big|dt.$$

Bài 3.40. Cho f khả vi liên tục trên $[a,b]$, và $f(a) = f(b) = 0, |f'(x)| \leq M,\ \forall x \in [a,b]$. Chứng minh rằng

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq M.\frac{(b-a)^2}{4}.$$

(Bạn đọc tự giải)

Bài 3.41. Cho f là hàm khả tích trên $[a,b]$ sao cho $f(x) > 0,\ \forall x \in [a,b]$.

Chứng minh rằng $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$.

(Bạn đọc tự giải).

Bài 3.42. Cho $a \in [0,1]$. Tìm tất cả các hàm không âm, liên tục trên $[0,1]$ sao cho

$$\int_0^1 f(x)dx = 1,\ \int_0^1 xf(x)dx = a,\ \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2.$$

Hướng dẫn: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwartz:

$a = \int\limits_0^1 xf(x)dx \leq \sqrt{\int\limits_0^1 x^2 f(x)dx}.\sqrt{\int\limits_0^1 f(x)dx} = a$, và điều kiện để dấu \=" xảy ra để kết luận không có hàm f nào thoả mãn.

Bài 3.43. Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn

$$\frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)dt = f\Big(\frac{x+y}{2}\Big),\ \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y.$$

Chứng minh rằng $f(x) = Ax + B$, với $A, B = const$.

Hướng dẫn: Chứng minh

$$f(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt,\ \forall x, h \in \mathbb{R}, h \neq 0.$$

Từ đó suy ra f có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bằng cách lấy đạo hàm hai vế biểu thức $2hf(x) = \int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)dt$

theo h ta nhận được điều cần chứng minh.

Bài 3.44. Tìm tất cả các hàm liên tục trên $[0,1]$ thoả mãn

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx = \int_0^1 (f(x))^3 dx = \int_0^1 (f(x))^4 dx.$$

Hướng dẫn: Sử dụng $\int\limits_0^1 \Big[f(x) - (f(x))^2\Big]^2 dx = 0.$

Bài 3.45. Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} u_n$, trong đó:

a) $u_n = \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x^n}.$

b) $u_n = \int\limits_0^1 x^n arctg(nx)dx.$

c) $u_n = \int\limits_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx.$

d) $u_n = n\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x dx.$

e) $u_n = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} arctg(nx)dx.$

f) $u_n = n\int\limits_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx.$

g) $u_n = \int\limits_0^1 x^n tgx dx.$

h) $u_n = n\int\limits_0^1 x^n tgx dx.$

(Bạn đọc tự giải)

Bài 3.46. Cho f là hàm liên tục trên $[0,+\infty)$. Đặt

$$F(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt.$$

a) Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = l.$

b) Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$

c) Hãy tìm một ví dụ để chỉ ra chiều ngược lại ở câu a) không còn đúng.

Lời giải:

a) Ta có:

$$\begin{aligned}|F(x)-l| &= \Big|\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt - l\Big| = \Big|\frac{1}{x}\int\limits_0^x (f(t)-l)dt\Big|\\ &\le \frac{\int\limits_0^x |f(t)-l|dt}{x},\ \forall x>0.\end{aligned}$$

Hàm số $G(x) = \int\limits_0^x \big|f(t)-l\big|dt$ là hàm đơn điệu tăng, không âm trên $(0,+\infty)$.

Nếu $G(x)$ bị chặn trên bởi M, ta có

$$\big|f(x)-l\big| \le \frac{M}{x},\ \forall x>0.$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = l$.

Nếu $G(x)$ không bị chặn trên $[0, +\infty)$ khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$.

Theo qui tắc L'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} G'(x) = \lim_{x\to+\infty} |f(x) - l| = 0.$$

Do vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

b) Hướng dẫn: áp dụng qui tắc L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_0^x f(t)dt}{x} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

(Để ý rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^x f(t)dt = +\infty$.)

c) Xét $f(x) = \sin x$.

Bài 3.47. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0, +\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Chứng minh rằng với mọi $a > 0$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^a f(nx)dx = al$.

Lời giải:

Dùng phép đổi biến $t = nx$ ta có

$$\int\limits_0^a f(nx)dx = \frac{1}{n}\int\limits_0^{na} f(t)dt = a\frac{1}{an}\int\limits_0^{na} f(t)dt.$$

Theo Bài tập 3.46. thì

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{na}\int\limits_0^{na} f(t)dt = l.$$

Do vậy $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_0^a f(nx)dx = al$.

Bài 3.48. Cho f là hàm liên tục trên $[0, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} = l \neq 0$, và $f(0) + f(1) + \cdots + f(n) \neq 0$ với mọi n. Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{\int\limits_0^n f(x)dx}{f(0) + f(1) + \cdots + f(n)}\right] = 1.$$

Lời giải: Ta có

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{\int\limits_0^a f(x)dx}{f(0) + f(1) + \cdots + f(n)}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\int\limits_0^n f(x)dx}{\frac{f(0)+f(1)+\cdots+f(n)}{n}}.$$

Theo Bài tập 3.46, thì $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n}\int\limits_0^n f(x)dx = l$.

Mặt khác vì $\lim\limits_{x\to\infty} f(n) = l$, nên

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(0) + f(1) + \cdots + f(n)}{n} = l.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{\int\limits_0^n f(x)dx}{f(0)+f(1)+\cdots+f(n)}\right]=1.$

Bài 3.49. Cho f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ tuần hoàn với chu kỳ T, g là một hàm liên tục trên $[0,T]$. Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^T f(nx)g(x)dx=0.$$

Bạn đọc tự giải.

Bài 3.50. Cho f và g là các hàm liên tục tuần hoàn với chu kỳ bằng 1 trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^1 f(nx)g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx.\int_0^1 g(x)dx.$$

Bài 3.51. a) Cho f là hàm liên tục trên $[0,1]$. Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx=f(1).$$

b) Giả sử $f'(1)$ tồn tại và $f(1)=0$. Hãy chứng minh

$$\lim_{x\to\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)dx=-f'(1).$$

Lời giải:

a) Trước hết ta chứng minh $\lim\limits_{x\to\infty} n\int\limits_0^1 x^n(f(x)-f(1))dx=0.$

Với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại $\delta\in(0,1)$ sao cho

$$\big|f(x)-f(1)\big|<\varepsilon,\ \forall x\in(1-\delta,1).$$

Đặt $M=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Ta có

$$\begin{aligned}\Big|n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))dx\Big| &\le n\int_0^{1-\delta}2Mx^n dx+n\int_{1-\delta}^1 x^n\varepsilon dx\\ &\le \frac{n}{n+1}\big(2M(1-\delta)^{n+1}+\varepsilon\big).\end{aligned}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to\infty}\Big|n\int\limits_0^1 x^n(f(x)-f(1))dx\Big|\le\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0.$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} n\int\limits_0^1 x^n(f(x)-f(1))dx=0.$

Do đó $\lim\limits_{x\to\infty}\left[n\int\limits_0^1 x^n f(x)dx - \dfrac{n}{n+1}f(1)\right] = 0.$

Suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} n\int\limits_0^1 x^n f(x)dx = f(1).$

b) Bạn đọc tự giải.

Bài 3.52. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[-a, a], a > 0$. Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to\infty}\int\limits_{-a}^{a}\frac{1-\cos nx}{x}f(x)dx.$$

Bạn đọc tự giải.

Bài 3.53. Cho $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ là hàm liên tục thoả mãn

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\int\limits_0^x (f(t))^2 dt = 1.$$

Chứng minh $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)(3x)^{\frac{1}{3}} = 1.$

Bạn đọc tự giải.