ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN - ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN OLYMPIC 2014

Môn thi: Đại số

Thời gian: 120 phút

1. Tìm một ma trận thực B sao cho

$$B^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Cho $f_1, f_2, \ldots, f_n$ là một hệ độc lập tuyến tính các hàm số khả vi liên tục trên đoạn $[0, 1]$. Chứng minh rằng từ các đạo hàm $f_1', f_2', \ldots, f_n'$ có thể chọn ra $n-1$ hàm số độc lập tuyến tính.

3. Chứng minh hoặc bác bỏ: Tồn tại một ma trận thực $n \times n$ sao cho

$$A^2 + 2A + 5I = 0$$

nếu và chỉ nếu n là số chẵn.

4. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp m. Chứng minh rằng $AB - BA = B^2$ khi và chỉ khi $P(A+B) = P(A) + P'(A)B$, với mọi đa thức $P(X)$.

5. Một ma trận được gọi là *ma trận nguyên* nếu tất cả các phần tử của nó đều là số nguyên. Cho A, B là hai ma trận nguyên kích thước 10×10. Biết rằng nghịch đảo của các ma trận $A, A+B, A+2B, \ldots, A+20B$ đều là các ma trận nguyên. Chứng minh rằng ma trận $A + 2014B$ khả nghịch và ma trận nghịch đảo của nó cũng là một ma trận nguyên.

6. Cho $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số thỏa mãn $(f(x))^n$ là đa thức với mọi $n = 2, 3, \ldots$. Chứng minh rằng $f(x)$ cũng là một đa thức.

[0]**Sinh viên không được sử dụng tài liệu**

1. Ma trận bên vế phải là ma trận khối gồm khối (2) và khối $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, nên ta sẽ tìm ma trận B dạng khối trong đó có khối cỡ 2×2, D, mà $D^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (Chéo hóa ma trận B^4 ta được $B^4 = CDC^{-1}$ trong đó

$$D = diag(2,2,1); C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

   Từ đó có thể chọn $B = C \cdot diag(\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}, 1) \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[4]{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt[4]{2} & 1 \end{pmatrix}$.)

2. Ta chỉ cần xét trường hợp hệ hàm số $f_1', f_2', \dots, f_n'$ phụ thuộc tuyến tính. Không mất tính tổng quát giả sử $f_n' = c_1 f_1' + c_2 f_2' + \dots + c_{n-1} f_{n-1}'$, với $c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$f_n = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_{n-1} f_{n-1} + c, \ c \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

   Rõ ràng $c \neq 0$ do hệ $f_1, f_2, \dots, f_n$ độc lập tuyến tính. Bây giờ ta chứng minh $f_1', f_2', \dots, f_{n-1}'$ độc lập tuyến tính. Xét ràng buộc tuyến tính $a_1 f_1' + a_2 f_2' + \dots + a_{n-1} f_{n-1}' = 0$. Từ đó

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_{n-1} f_{n-1} + A = 0, \ A \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

   Từ (1) và (2) ta có $(Ac_1 - ca_1) f_1 + (Ac_2 - ca_2) f_2 + \dots + (Ac_{n-1} - ca_{n-1}) f_{n-1} = A f_n$. Suy ra $A = 0$ và do $c \neq 0$ nên $a_k = 0$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n-1$.

3. Từ giả thiết chỉ ra được đa thức cực tiểu của A là $p(t) = t^2 + 2t + 5$. Chỉ ra được đa thức đặc trưng là một bội của đa thức tối tiểu. Từ đó suy ra n chẵn.

   Ngược lại, nếu n chẵn ta lấy ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

   rồi lấy ma trận đường chéo khối có $n/2$ phiên bản A thì thu được ma trận thỏa mãn phương trình.

4. Nếu ta có $P(A+B) = P(A) + P'(A)B$ thì chọn $P(X) = X^2$ suy ra ngay $AB - BA = B^2$.

   Ngược lại, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $(A+B)^{n+1} = A^{n+1} + (n+1)A^n B$. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

5. Từ điều kiện bài toán ta có $f(t) = \det(A + tB) = \pm 1$ với mọi $t = 0, 1, \dots, 20$. Như vậy hàm số $f^2(t) - 1$ có bậc không quá 20 và có 21 nghiệm. Suy ra $f^2(t) - 1$ là đa thức không. Do đó $\det(A + 2014B) = \pm 1$. Theo công thức Cramer ma trận $(A + 2014B)^{-1}$ phải là ma trận nguyên.

6. Cách 1. Giả sử $\frac{p}{q}$ là dạng rút gọn của hàm phân thức $\frac{f^3}{f^2}$. Khi đó dạng rút gọn của $\left(\frac{f^3}{f^2}\right)^2$ là $\frac{p^2}{q^2}$. Mặt khác $\frac{p^2}{q^2} = \left(\frac{f^3}{f^2}\right)^2 = f^2$ là một đa thức. Suy ra q phải là hằng số và do đó $f = \frac{f^3}{f^2} = \frac{p}{q}$ là một đa thức.

   Cách 2. Viết hai đa thức $f^2(x)$ và $f^3(x)$ về dạng

   $$p = f^2 = a \cdot p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}, q = f^3 = b \cdot q_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot q_l^{b_l}$$

   với $a, b \in \mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l$ là các số nguyên dương và $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l$ là các đa thức tối giản với hệ số cao nhất bằng 1. Do $p^3 = q^2$ và cách phân tích $p^3 = q^2$ là duy nhất nên ta có $a^3 = b^2, k = l$ và với một phép thế $(i_1, \ldots, i_k)$ của $(1, \ldots, k)$ ta có $p_1 = q_{i_1}, \ldots, p_k = q_{i_k}$ và $3a_1 = 2b_1, \ldots, 3a_k = 2b_k$. Suy ra $b_1, \ldots, b_l$ là các số chia hết cho 3. Do đó $r = b^{1/3} \cdot q_1^{b_1/3} \cdot \ldots \cdot q_l^{b_l/3}$ là một đa thức. Do $r^3 = q = f^3$ nên $f = r$.